Exercice avec préparation.

Pour tout $x > 0$, on s'intéresse à la série de terme général : $u_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$.

1°) Montrer que $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x > 0$.

On nomme S la fonction somme.

2°) Montrer que la fonction S est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3°) Montrer qu'il existe un réel k tel que pour $0 < a < b$,

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |S(y) - S(x)| \leqslant k|y - x|$$

4°) Donner la définition de fonction continue en x_0

Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

5°) a) Montrer que, pour tout $x > 0, S(x) - S(x + 1) = \frac{1}{x^2}$

b) En déduire un équivalent, au $\mathcal{V}$ (0), de S

6°) Montrer que $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

7°) Python.

a) Écrire une fonction `Somme`(N, x) qui modélise $S(x)$

b) Trouver le plus petit entier N, tel que $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+x)^2} > 10^3$ (réponse N = 500)