Exercice avec préparation

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}[X]$, telle que :

$$\varphi(P) = (1 - X^2)P'' - 3XP'$$

On pose également, pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, $\langle P|Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$

1°) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

2°) Déterminer A la matrice de φ dans $\mathcal{B}$, la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

3°) A est-elle diagonalisable ? φ est-il un automorphisme ?

4°) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer qu'il existe un unique polynôme P_k de degré $k \in [\![0, n]\!]$, ayant pour coefficient dominant 1 et tel que $\varphi(P) = -k(k+2)P$.

5°) Déterminer P_k , pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

6°) *Question en lien avec le degré de P ou de f (P). Le candidat ne se souvenait plus.*

7°) Montrer que $\langle\, .\, |\, .\, \rangle$ est un produit scalaire

8°) *D'autres questions par rapport au produit scalaire…*

9°) ***Beaucoup*** *de questions sur les probas non faites*

10°) **Python**. On définit le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par la liste $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ de ses coefficients dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
Avec le degré n de P créer un algorithme Python renvoyant le polynôme $\varphi(P)$ sous forme de liste. Spécial planche informatique : $\varphi(P) = (1 - X^2)P'' - 3XP'$