EXO 2 :

On se donne pour u, v, w des réels non nuls la matrice :

$$M = -3/2 \begin{pmatrix} -1/2 & v/u & w/u \\ u/v & -1/2 & w/v \\ u/w & v/w & -1/2 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que 1 est valeur propre de M et donner une base du sous-espace propre associé (on ne demande pas de calculer le polynôme caractéristique).

2) En déduire que M est diagonalisable et montrer sans calcul que $M^2 = I_3$.

Montrer que $M \in O_3(\mathbb{R})$ si et seulement si $|u| = |v| = |w|$.

3) $P = \begin{pmatrix} vw & w & v \\ uw & 0 & -u \\ uv & -u & 0 \end{pmatrix}$ Calculer P^{-1} .

(Éléments de correction à la page suivante)

Eléments de correction EXO 1 :

Confer la correction de la banque CCINP 2025

Eléments de correction EXO 2 :

- 1) Méthode 1 : (astuce qui court-circuite la question, l'examinateur m'a donc ensuite demandé l'équation du plan décrivant $E_1(M)$) Se dire que P (de la question 3) est la matrice de passage et remarquer que l'image des vecteurs donne $Sp(M) = \{1, -1\}$. La base de $E_1(M)$ est (e_2, e_3) , la 2ème et 3ème colonne de la matrice P .

Méthode 2 : trouver l'équation du plan décrivant $E_1(M)$ en résolvant l'équation $MX = X$. On obtient l'équation : $ux + vy + wz = 0$. On en déduit que 1 est valeur propre d'ordre 2 de M et une base de $E_1(M)$ en prenant 2 vecteurs non colinéaire du plan.

- 2) On peut trouver $Sp(M) = \{1, -1\}$ en utilisant la question 1) et 3) ou en résolvant l'équation $MX = \lambda X$. On a vérifié dans la question 1) que $\dim(E_1(M)) = 2$ donc 1 est valeur propre d'ordre 2 et -1 est valeur propre d'ordre 1. On en déduit que M est diagonalisable.

Le paragraphe précédent donne $Sp(M^2) = \{1\}$ donc $M^2 \sim_s I_3$. Or la seule matrice qui est semblable à l'identité n'est autre qu'elle-même. Donc $M^2 = I_3$.

Procéder par équivalence :

$$M \in O_3(\mathbb{R}) \Leftrightarrow M^T M = I_3 \Leftrightarrow^* M^T = M \Leftrightarrow |u| = |v| = |w|$$

*Comme 0 n'est pas valeur propre de M , elle est inversible et on a multiplié par M^{-1} des deux côtés.

- 3) Réfléchir aux différentes manières de calculer P^{-1} .

Méthode 1 : (la meilleur) Utiliser la comatrice et la formule $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \text{com}(M)^T$.

Méthode 2 : (beaucoup moins efficace mais celle que j'ai dû utiliser car je ne retrouvais plus la première) Résoudre $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ pour exprimer x, y, z en fonction de X, Y, Z et en déduire P^{-1} .