

oral ensea

July 2026

Concours ENSEA (20 min préparation, 20 min passage)

Exercice 1

Soit $(a_0, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n+1}$.

$$S = (a_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n} \quad \text{avec la convention} \quad a_k = 0 \text{ si } k > n.$$

($S_{i,j} = a_{i+j}$ si $i + j \leq n$, et $S_{i,j} = 0$ sinon, pour $i, j = 0, \dots, n$)

Question : valeurs propres de S et vecteurs propres. (indication : calculer S^2)

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n \geq 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$, avec

$$u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}.$$

- 1) Montrer que (u_n) est bien définie et que (u_n) est croissante.
- 2) On se place dans le cas $a_n = 1$.
 - a) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
 - b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n^2 = u_0^2 + \sum_{q=0}^{n-1} \frac{1}{u_q^2} + 2n$$

et que

$$\sqrt{2n} \leq u_n \leq u_0^2 + \frac{1}{u_0^2} + \frac{5n}{3}$$

(*annotation manuscrite : coefficient incertain — "4/3 ou 5/2, jsp"*)

- c) Montrer que (u_n) converge $\iff \sum a_n$ converge.

3) On a maintenant $a_n = \frac{1}{3^n}$.

a) Montrer que (u_n) converge vers ℓ , à déterminer.

b) Montrer que

$$u_n^2 - \ell \sim \frac{1}{3^{n+1}}$$

(annotation manuscrite : incertitude — " ℓ^2 ? ou ℓ , je ne sais plus")