
Problème 1. *On étudie les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient la condition :*

$$\chi_A(X) = \prod_{k=0}^{n}(X - a_{k,k}) \tag{1}$$

C'est-à-dire les matrices pour lesquelles la valeurs propres sont réelles et sont exactement les coefficients diagonaux de la matrice

1. *On pose* $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   M_1 et M_2 vérifient-elles la condition (1) ?

2. *Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on pose* $M_{u,v} = \begin{pmatrix} u & v & v \\ v & u & v \\ v & v & u \end{pmatrix}$

   À quelle condition nécessaire et suffisante $M_{u,v}$ vérifie-t-elle la condition (1) ?

3. *Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la condition (1) ?*

Problème 2. *On pose* $\forall\, x > 0, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!\,(n+x)}$

1. *Montrer que f existe*

2. *Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que* $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$