Exercice 1

Soit $b \in \mathbb{R}$ fixé. On considère l'application

$$\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$$

définie, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, par

$$\Phi(P) = (X-b)\big(P'(X) + P'(b)\big) - 2\big(P(X) - P(b)\big).$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer qu'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

   $$(X-b)^k \mid \Phi(P).$$

   Déterminer la plus grande valeur possible de k.
3. Déterminer $\ker(\Phi)$.
4. Déterminer $\mathrm{Im}(\Phi)$.

Exercice 2

On considère la fonction

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x,y) \longmapsto x^2 y + y(\ln y)^2,$$

où

$$D = \mathbb{R} \times]0, +\infty[.$$

1. Déterminer les points critiques de f sur D.
2. La fonction f admet-elle un maximum global sur D ? Un minimum global sur D ?