CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

Oral

TSI

Exercice avec préparation

On considère les deux surfaces dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{S}_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x\sin z = y\cos z\}$$
$$\mathcal{S}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2+y^2 = 1\}$$

1.
   a. Représenter $\mathcal{S}_2$.

   b. Écrire des équations des plans tangents à ces surfaces au point $A = (1/2, \sqrt{3}/2, \pi/3)$.

2.
   a. Définir deux courbes γ_1 et γ_2 vérifiant

$$\begin{cases} \gamma_1 \cup \gamma_2 = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \\ \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset \\ A \in \gamma_1 \end{cases}$$

   b. Dessiner γ_1. Déterminer la tangente en A à γ_1.

Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$F(x,y,z) = \left(\frac{-x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}, z\right)$$

3. Quel est l'ensemble de définition $\mathcal{U}$ de F ? Contient-il $\mathcal{S}_1$? $\mathcal{S}_2$?
4. Montrer que F est bijectif de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{U}$ et de classe C^1. Écrire sa matrice jacobienne au point A.
5. Donner des équations des plans tangents en $F(A)$ aux surfaces $F(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{U})$ et $F(\mathcal{S}_2)$.
6. Identifier la courbe $F \circ \gamma_1$ et définir sa tangente au point $F(A)$.

Exercice sans préparation

Écrire la matrice, relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection orthogonale sur la droite dirigée par le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.