Exercice avec préparation.

On donne une fonction $f : [1 + \infty[\rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$. Enfin, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$.

1°) a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant f(k)$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - f(1) \leqslant \int_1^n f(t)\mathrm{d}t$

c) Montrer que la série de terme général $f(k)$ converge.

2°) On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \leqslant R_n \leqslant f(n) + \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t > 0$

c) Donner une condition suffisante pour que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$

3°) On pose $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a) Montrer que f vérifie les hypothèses et la condition suffisante.

b) En déduire un équivalent de R_n pour cette fonction f .

c) **Python**. On peut montrer, par ailleurs, que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Faire un algorithme permettant de déterminer la valeur de π à ε près, avec ε choisi par l'utilisateur.

Exercice sans préparation.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$

On note $F = \mathrm{Vect}(\cos\ , \sin\ )$

1°) Déterminer la dimension de F.

1°) Soit $D : E \rightarrow E$ définie par $D(f) = f'$. Montrer que D est un endomorphisme de F.

2°) Quelle interprétation géométrique peut-on donner pour D restreint à F ?

Donner la matrice de D dans la base de F.