Premier exercice (préparé) :
Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie (de dimension n). Soit u $\in \mathcal{L}(E)$
Montrer que u est diagonaisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u.

Deuxième exercice (non préparé) :

$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}dt}{1+t^2}$ et $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$

1) Montrer que f et g sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

2) Calculer $f + g^2$

3) Trouver la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$

Correction :

Premier exercice :

Implication : Soit F un sous-espace vectoriel de E, de base $(x_1, ..., x_p)$. u est diagonalisable si et seulement si il existe une base de vecteurs propores $(y_1, ..., y_n)$

On complète la base $(x_1, ..., x_p)$ (en utilisant le théorème de la base incomplète avec la famille génératrice $(y_1, ..., y_n)$) en une nouvelle base de E.

Cette base est $(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_{n-p})$. (quitte à réordonner les vecteurs, on les classe dans cet ordre)

Et on a $G = Vect(y_1, ..., y_{n-p})$ qui est supplémentaire de F stable par u (car $y_i$ vecteurs propres)

Réciproque (plus dur) :

Méthode de l'examinateur (par l'absurde) : On suppose u non diagonalisable. On a alors $E_{\lambda i}$ en somme directe mais $E_{\lambda 1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda k} \neq E$ ($(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont les valeurs propres)

Considérer alors la restriction de u à G le supplémentaire de $F = E_{\lambda 1} \bigoplus ... \bigoplus E_{\lambda k}$, son polynôme caractéristique divise celui de u sur E. Aboutir à une contradiction, le fait que le seul supplémentaire stable par u possible soit le vecteur nul.

Autre méthode (refusée par l'examinateur) :

Considérer F de dimension n-1, (hyperplan de E), et utiliser l'hypothèse pour montrer que G est supplémentaire tel que $\forall x \in G, u(x) = \lambda_1 x$

On a trouvé un vecteur propre. On réitère en prenant un deuxième hyperplan contenant $Vect(E_{\lambda 1})$. Il a un supplémentaire tel que $\forall x \in G, u(x) = \lambda_2 x$

En répétant l'opération n fois, on obtient bien une famille libre de n vecteurs propres.

Deuxième exercice :

1) Montrer que f est continue est classique, on pose $h(x,t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$

$h(.,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ ; $h(x,.)$ est continue sur $[0,1]$ et $|h(x,t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ (fonction intégrable indépendante de x).

Puis $\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = -2x.e^{-x^2(1+t^2)}$ C'est pareil pour la continuité mais pour la majoration c'est plus subtil, il faut travailler sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et faire attention à bien majorer.

Pour dire que g est $\mathcal{C}^1$, je l'ai comparé à $\int_0^x e^{-t}dt$, dit qu'elle convergeait et dit que t $\mapsto e^{-t^2}$ est continue.

2) $f'(x) = \int_0^1 -2x.e^{-x^2(1+t^2)}dt$ (Première astuce, penser à travailler avec $f'$ puisqur l'on vient de montrer son existence).

Deuxième astuce, penser à se ramener aux mêmes bornes d'intégration que $g$. Pour cela, il faut poser le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = xt$.

$\int_0^1 -2x.e^{-x^2(1+t^2)}dt = \int_0^x -2x.e^{-x^2(1+(\frac{u}{x})^2)}\frac{du}{x}$
$= \int_0^x -2.e^{-(x^2+u^2)}du$
$= -2.e^{-x^2}.\int_0^x e^{-u^2}du$
$= -2.e^{-x^2}.g(x)$

Troisième et énorme astuce, $g'(x) = e^{-x^2}$
$\Longrightarrow f'(x) + 2g'(x)g(x) = 0$
$\Longrightarrow f(x) + g^2(x) = K$

En évaluant en zéro, on obtient $f(x) + g^2(x) = \frac{\pi}{4}$

3) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par le théorème de convergence dominée, on a alors $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$