Soient (f,g) $\in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})^2$

Trouver l'ensemble des fonctions (f,g) telles que : f(xt)=f(x)g(t) $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

Pistes abordées pendant l'oral, suggérées par l'examinateur ou moi-même :

1) Solutions évidentes
2) Evaluer en des valeurs pertinentes
3) Se ramener à une équation dépendant que d'une seule fonction (en f)
4) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$
5) Trouver une équation différentielle en f
6) Se ramener à une équation différentielle d'une seule variable
7) Finir l'exercice en raisonnant par condition nécessaire puis suffisante sur la détermination de f et g

Correction :

1) Si f est la fonction nulle , toute fonction g est solution. Si f est linéaire, g est l'identité. Si f est constante, g est constante égale à 1.

2) $f(t) = f(1).g(t)$ ; $f(x) = f(x).g(1)$ ; ($f$ n'est pas la fonction nulle implique $g(1) = 1$, ce que l'on suppose désormais).

$f(0) = f(x).g(0)$ ; si $g(0) \neq 0$, $f(x) = \frac{f(0)}{g(0)}$

$f(0) = f(0).g(t)$ ; si $f(0) \neq 0$, $g(t) = 1$

3) $f(xt) = f(x).g(t)$ et $f(t) = f(1).g(t)$ (On suppose $f(1) \neq 0$, et on pose $\alpha = f(1)$)

On a alors : $f(xt) = \frac{f(x)f(t)}{\alpha}$

4) J'avais essayé de me ramener à la limite d'un taux d'accroissement pour montrer que $f$ est dérivable mais je n'avais pas réussi. L'astuce est de primitiver f pour montrer qu'elle est $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^\infty$.

$\int_0^A f(xt)dt = \int_0^A \frac{f(x)f(t)}{\alpha}dt$

Puis on réalise le changement de variable $\mathcal{C}^1$, on pose u=xt, du=xdt :

$\int_0^{Ax} \frac{f(u)du}{x} = \frac{f(x)}{\alpha}[F(A)-F(0)]$ (F primitive de f, donc F est $\mathcal{C}^1$)

$\frac{1}{x}[F(Ax) - F(0)] = \frac{f(x)}{\alpha}[F(A) - F(0)]$ $(F(0) = 0)$

$\frac{F(Ax)}{x} = \frac{f(x)F(A)}{\alpha} \Longrightarrow f(x) = \frac{\alpha F(Ax)}{xF(A)}$ (On suppose $F(A) \neq 0$)

On en déduit que $f$ est égale à une fonction $\mathcal{C}^1$, puis $F$ est $\mathcal{C}^2$...

5) $f(xt) = \frac{f(x)f(t)}{\alpha} \Longrightarrow tf'(xt) = \frac{f(t)f'(x)}{\alpha}$

6) Il faut alors avoir l'idée d'évaluer en x=1, ce qui donne :

$tf'(t) = \frac{f(t)f'(1)}{\alpha} \Longrightarrow$ (H) : $f'(t) - \frac{f'(1)f(t)}{f(1)t} = 0$

$f_H(t) = Ct^{\frac{f'(1)}{f(1)}}$ $(C \in \mathbb{R})$(s'il existe des solutions $f$, alors elles sont de cette forme)

Puis on trouve $C = f(1)$ en injectant $f_H$ dans (H), on obtient alors $f = f(1)t^{\frac{f'(1)}{f(1)}}$

7) Il reste encore à étudier g.