CCP

Exercice 1

On rappelle qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite nilpotente lorsqu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.

1. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotentes. $A + B$ est-elle toujours nilpotente ?

(On a demandé de prouver que c'était le cas si A et B commutent, et de donner un contre-exemple dans le cas contraire).

2. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $A + B$ est nilpotente. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = 0$.

Exercice 2

Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 - 5n + 1}{n!} x^n$, et, lorsque x appartient à ce domaine, calculer $f(x)$.