Maths 2

Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par
$g_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n g_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g_k}{n-k}$

On pourra utiliser $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + O(1)$

1. (python) Afficher sur un graphe les g_n et $n^2 g_n$ pour $n \in [\![0, 200]\!]$

2. Montrer que (g_n) est bornée. En déduire que le rayon de convergence de la suite (g_n) est supérieur ou égal à 1

3. On pose $\forall x \in]-1, 1[$, $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n x^n$
et $f(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x}$, f étant prolongeable par continuité en 0.
Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$, $G'(x) = f(x) G(x)$

4. Montrer que $g_n = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

5. Montrer que $g_n = O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$

6. Montrer que $\sum_{n\geq 0} g_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{2}$
$\left(\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)$

7. non traitée