Sujets d'oraux de mathématiques

Exercice 1 — Suite de fonctions définies par une intégrale

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0(x) = 1$$

$$f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)^2 \, dt$$

1. Calculer f_1 et f_2.

2. Soit $x \in [0,1[$.

a) Montrer que $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

b) Montrer par récurrence que, pour $a \in [0,1[$ et $x \in [0,a]$:

$$0 \leqslant f_{n+1}(x) - f_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{2}{1-a}\right)^n$$

3. Montrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1[$ vers une fonction f (qu'on ne cherchera pas à déterminer dans un premier temps), et montrer que f ne s'annule pas.

4. Montrer que $\sum(f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément sur tout segment $[0,a]$ inclus dans $[0,1[$.

5. En déduire que

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t)^2 \, dt \qquad \text{pour tout } x \in [0,1[.$$

6. Calculer f.

Exercice 2 — Endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'application

$$F : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R}), \qquad M \longmapsto AM$$

1. Montrer que F est un automorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer la matrice de F dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.