

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}$, sa signature est $\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq 2n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$. On pose :

$$\Gamma(n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2n}} \frac{\varepsilon(\sigma)}{(1 + a(\sigma))(1 + b(\sigma))}$$

où $a(\sigma)$ et $b(\sigma)$ désignent les nombres de points fixes de σ respectivement dans $\{1, \dots, n\}$ et $\{n+1, \dots, 2n\}$.

1. Écrire des fonctions calculant : a) les points fixes d'une permutation, b) sa signature, c) Γ (via la liste de $\mathfrak{S}_{2n}$ fournie).

2. Soit $U_n(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & x \end{pmatrix}$. Quelles sont les valeurs propres de $U_n(1-x)$ et leurs multiplicités ?

3. Pour $V_{2n}(x, y) = \begin{pmatrix} U_n(x) & U_n(1) \\ U_n(1) & U_n(y) \end{pmatrix}$, montrer que $\iint_{[0,1]^2} \det(V_{2n}(x, y)) \, dx dy = \Gamma(n)$.

4. Si A et C commutent, montrer que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

(Indication : supposer A inversible et multiplier par $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ * & I_n \end{pmatrix}$).

5. Calculer $\det(V_{2n}(x, y))$.
6. Calculer l'intégrale d'une autre façon et en déduire $\Gamma(n)$.