

Oral de Mathématique Mines-Ponts

Exercice 1 (avec préparation)

Soit $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_A son polynôme caractéristique.

1)

- a) Donner le lien entre la diagonalisabilité de A et son polynôme minimal.
- b) On suppose que χ_A a n racines distinctes dans $\mathbb{K}$. Montrer que A est diagonalisable.
- c) Donner un exemple de matrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable ; dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2)

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de χ_A comptées avec multiplicités et

$$\Delta(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\lambda_i - \lambda_j|^2$$

- a) Montrer que χ_A a n racines distinctes si et seulement si $\Delta(A) \neq 0$.
- b) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \Delta : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ A &\longmapsto \Delta(A) \end{aligned}$$

est polynomiale en les coefficients de A .

- c) En déduire que l'ensemble des matrices à n valeurs propres distinctes est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2

1)

Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$. On écrit : $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, avec $a_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$
Calculer :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt$$

2)

Soit $A_1, \dots, A_n$ des points du plan complexe d'affixes respectives $z_1, \dots, z_n$. Montrer qu'il existe un point P sur le cercle unité d'affixe z_P tel que :

$$\prod_{i=1}^n x_i \geq 1 \quad \text{où} \quad x_i = |z_i - z_P|, \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Exercice 3

Soit $p \in]0, 1[$. X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique de paramètre p .

Calculer :

$$\mathbb{P}(X^Y \geq Y^X)$$