

Exercice avec préparation.

On donne l'équation différentielle (E) :

$$x^2 f''(x) + 3x.f'(x) + f(x) = \frac{1}{x} \text{ pour } x > 0$$

Et on pose $g(t) = f(e^t)$

1°) a) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} .

b) Montrer que si f est solution de (E) alors g est solution de (E') avec

$$(E') : g''(t) + 2g'(t) + g(t) = e^{-t} .$$

c) Montrer la réciproque.

2°) Résoudre (E').

3°) En déduire les solutions de (E).

4°) Montrer qu'une unique solution vérifie $f(1) = 1$ et $f'(1) = 1$ et la déterminer.

5°) Tracer la solution avec **Python**.

6°) Chercher s'il y a des solutions de $x^2 f''(x) + 3x.f'(x) + f(x) = 0$ développable en série entière.

Exercice sans préparation.

Chercher le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$, avec $n \geq 2$.