(Centrale MP 2024 (Math)) Soit $V = \{M \in S_3(\mathbb{R}) / \mathrm{rg}(M) \leqslant 2\}$.
On pose $(A|B) = \mathrm{tr}(A^T B)$ comme produit scalaire sur $M_3(\mathbb{R})$ et $\|A\| = \sqrt{(A|A)}$ la norme euclidienne associée.

Pour $A \in M_3(\mathbb{R})$, on note $d(A, V) = \inf_{M \in V} \|A - M\|$.

1. Soient $(E, \|.\|)$ et $(F, \|.\|)$ deux espaces vectoriels normées et $f : E \to F$ continue.
   Montrer que si G est une partie fermée de F alors $f^{-1}(G)$ est une partie fermée de E.
   En déduire que V est une partie fermée de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe $B \in V$, $d(A, V) = \|A - B\|$.
3. Montrer que $AB - BA$ est symétrique.
   Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
   Soit $g : \theta \mapsto \left\|A - R_\theta B R_\theta^{-1}\right\|$.
   Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(0)$.

Il y avait une autre question.