

LATIL MÉLODY

MINES-PONTS : MATHS

Exercice 1 : ~ 20 min préparation

1) $E = \mathbb{R}_n[X]$

$(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 2 à 2 distincts

$\forall (P, Q) \in E^2 \quad (P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k) Q(a_k)$

mq (1) est un produit scalaire

2) $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / \{0, \dots, 0\}$

(a) $W = \left\{ P \in E \mid \sum_{k=0}^n \alpha_k P(a_k) = 0 \right\}$

déterminer la dimension de W

(b) soit $Q \in E$

déterminer $d(Q, W)$

Exercice 2 : sans préparation

soit $(z_n)_n$ suite de complexes

hypothèse : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$ distincts, $|z_n - z_m| < \sqrt{2}$

On note $M(z_n) = (x_n, y_n)$ par $z_n = x_n + iy_n$

$\Theta \quad \mathcal{E} = \{ n \in \mathbb{N} / M(z_n) \in [-A, A] \times [-A, A] \}$

1- mq $\mathcal{E}$ est fini

indication : il faut majorer le cardinal de $\mathcal{E}$

Θ on pourra poser $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}(z_n, \sqrt{2}/2)$ et

regarder $\mathcal{E}_n \cap \mathcal{E}$

2- en déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$

indication : $\mathcal{E}$ est fini par tout A choisi

bonus : mq $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{|z_n|^3}$ converge

indication : $A_N = \{ n \in \mathbb{N} / |z_n| \in [N, N+1[\}$
puis partitionner