

# Oraux IMT 2025

## Mathématiques

### Exercice 1 – Analyse

On définit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = \frac{\ln(1 + \frac{x}{n})}{x(1 + x^2)}$$

1. Montrer que  $f_n$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ .

2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n$ .

3. Calculer  $\lim_{x \rightarrow \infty} n \int_0^{\infty} f_n$ .

### Exercice 2 – Algèbre

On munit  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  du produit scalaire :  $(A|B) = \text{tr}(A^T B)$ .

On pose  $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1. Montrer que  $V$  est un espace vectoriel.

2. Déterminer une base orthonormée de  $V^T$ .

3. Déterminer la projection orthogonale de  $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  sur  $V^T$ .

### Exercice Bonus – Algèbre

Résoudre l'équation  $x^2 + x + 1 = 0$  dans  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ .