Université de Genève – hiver 2004/05 – Cours de théorie ergodique.

Il s'agit essentiellement du chapitre 1 d'un cours dont la suite a suivi de près le début de [Walte–82]. (Egalement rédigé : le chapitre 2, pages 14–16, le plan du cours, page 17, et les exercices, pages 17–30).

# EQUIRÉPARTITION MODULO 1 D'APRÈS HERMANN WEYL

Pierre de la Harpe

1916 est une année clé dans la genèse de la théorie ergodique. C'est la date de la parution d'un article de Hermann Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod.* 1, dans les *Mathematische Annalen* **77** (1916), pages 313–352. Dans ce chapitre préliminaire, nous exposons une partie des résultats de cet article, ainsi que plusieurs interprétations. Il est frappant que celles-ci concernent à la fois la théorie des nombres, la géométrie différentielle et la mécanique.

Notre résultat principal, le théorème 4, est en fait dû indépendamment à P. Bohl, W. Serpinski et H. Weyl et date des années 1909–1910 ; il a été fortement motivé par des problèmes de mécanique céleste. Mais c'est incontestablement l'article de 1916 de Weyl qui a le plus marqué son temps (et le nôtre !). Voir par exemple [CheWe–57].

Si $x$ est un nombre réel, nous désignons par $\{x\}$ sa partie fractionnaire. Par exemple

$$\{e\} = 0,718\,281\,828\,459\ldots \quad \text{et} \quad \{-e\} = 0,281\,718\,171\,540\ldots.$$

Si $I$ est un intervalle de la droite réelle, $\chi_I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est sa fonction caractéristique : $\chi_I(x) = 1$ si $x \in I$ et $\chi_I(x) = 0$ sinon; de plus $|I|$ désigne la longueur de $I$.

**1. Definition.** *Une suite infinie $(x_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels est* équirépartie modulo 1 *si, pour tout sous-intervalle $I$ de $[0,1]$, la suite définie par*

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_I(\{x_j\})$$

*converge vers $|I|$.*

**2. Lemme.** *Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite infinie de nombres réels, tous dans $[0,1]$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *la suite est équirépartie modulo 1 ;*

(ii) *la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\int_0^1 f(t)dt$ pour toute fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $f(0) = f(1)$ ;*

(iii) *la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \exp(2i\pi k x_j)\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0 pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.*

*Remarques.* Si $k = 0$, la suite de (iii) est la suite constante de valeur 1.

Pour la proposition qui suit, il suffit de montrer les implications $(iii) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (i)$. Par ailleurs, l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est banale.

L'implication $(iii) \Rightarrow (ii)$ résulte du théorème d'approximation de Stone-Weierstrass (voir par exemple [Rudin–76], page 190). Elle résulte bien sûr aussi d'un théorème de Féjer, plus précis dans ce cas : si $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$, alors les sommes de Césaro de la série de Fourier de $f$ convergent uniformément vers $f$ (voir le cours d'Analyse II).

*Preuve de* $(i) \Rightarrow (ii)$. La propriété (i) implique que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \;=\; \int_0^1 f(t)dt$$

lorsque

- $\circ$ $f$ est la fonction caractéristique d'un sous-intervalle de $[0,1]$, par définition ;
- $\circ$ $f$ est une fonction en escalier, par linéarité de la condition ;
- $\circ$ $f$ est une fonction continue à valeurs réelles, car toute fonction de ce type est limite uniforme de fonctions en escalier ;
- $\circ$ $f$ est[1] comme dans l'énoncé de (ii), c'est-à-dire continue à valeurs complexes, par linéarité.

*Preuve de* $(ii) \Rightarrow (i)$. Supposons la propriété (i) satisfaite. Soit $I \subset [0,1]$ un sous-intervalle et $\epsilon$ un nombre strictement positif. Il existe deux fonctions continues $f_-, f_+ : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\begin{array}{ll} (a) & f_-(t) \;\le\; \chi_I(t) \;\le\; f_+(t) \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,1] \\ (b) & \displaystyle\int_0^1 (f_+(t) - f_-(t))\, dt \;<\; \epsilon \\ (c) & f_-(0) \;=\; f_-(1) \;=\; 0 \quad \text{et} \quad f_+(0) \;=\; f_+(1) \;=\; 1 \end{array}$$

(les conditions de (c) tiennent compte des cas où $I$ contient une extrémité de $[0,1]$). Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_-(x_j) \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_I(x_j) \;\le\; \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_+(x_j)$$

pour tout $n \ge 1$. En faisant tendre $n$ vers l'infini et en utilisant (ii), on obtient

$$\begin{aligned} |I| - \epsilon \;\le\; \int_0^1 f_-(t)dt \;&\le\; \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_I(x_j) \\ &\le\; \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \chi_I(x_j) \;\le\; \int_0^1 f_+(t)dt \;\le\; |I| + \epsilon \end{aligned}$$

pour tout $\epsilon > 0$. La propriété (i) en résulte. □

**3. Exercice.** Montrer que les conditions du lemme 2 sont encore équivalentes à :

(iv) la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)\right)_{n\ge 1}$ converge vers $\int_0^1 f(t)dt$ pour toute fonction intégrable au sens de Riemann $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ .

[1] Il est bien sûr permis de court-circuiter les deux dernières étapes.

Remarque : c'est une condition qui apparaît dans [Weyl–16], mais que nous n'utilisons pas ci-dessous.

Indication : penser à la définition de "intégrable au sens de Riemann".

**4. Théorème.** *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ ; soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ un nombre irrationnel. La suite définie par*

$$x_n = x_0 + n\alpha \qquad n \geq 1$$

*est équirépartie modulo* 1.

*Preuve.* Vu le lemme précédent, il suffit de montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, la quantité

$$r_n = \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp(2i\pi k(x_0 + j\alpha)) \right|$$

est arbitrairement petite lorsque $n$ est assez grand. Or

$$r_n = \left| \frac{1}{n} \exp(2i\pi k(x_0 + \alpha)) \frac{\exp(2i\pi kn\alpha) - 1}{\exp(2i\pi k\alpha) - 1} \right| \leq \frac{2}{n\,|\exp(2i\pi k\alpha) - 1|}$$

tend vers 0 lorsque $n \to \infty$ avec $k$ fixé. (Remarquer que $\exp(2i\pi k\alpha) - 1 \neq 0$ pour tout $k \neq 0$, par irrationalité de $\alpha$.) □

**5. Corollaire.** *Soient $x_0$, $\alpha$ et $(x_n)_{n\geq 1}$ comme au le théorème précédent. Alors la suite $(\{x_n\})_{n\geq 1}$ est dense dans* $[0, 1]$.

**6. Exercice.** Le but de cet exercice est de montrer un exemple de suite dense dans $[0, 1]$ mais non équirépartie modulo 1. (Il en existe d'autres ! par exemple, si $(x_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie, la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ définie par $y_{2n} = x_n$ et $y_{2n+1} = 0$ pour tout $n \geq 1$.)

(i) Montrer que la suite $(\{\log n\})_{n\geq 1}$ est dense dans $[0, 1]$.

Indication. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq a < b < 1$. Pour tout $k$ assez grand, il existe $n$ tel que $e^{a+k} < n < e^{b+k}$, donc tel que $a < \{\log n\} < b$.

(ii) Soient $n$ un entier, $n \geq 1$, et $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} F(j) = \frac{1}{n} \int_1^n F(t)dt + \frac{1}{n} \int_1^n \Big(\{t\} - \frac{1}{2}\Big) F'(t)dt + \frac{1}{2n}(F(1) + F(n)).$$

(C'est une *formule sommatoire d'Euler-Maclaurin*; voir par exemple le théorème 10.6 de [HaiWa–96].)

Indication. Intégrer par parties $\int_j^{j+1} \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) F'(t)dt$, sommer sur $j$ de 1 à $n - 1$ et diviser par $n$.

(iii) Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp(2i\pi \log j) = \frac{\exp(2i\pi \log n)}{2i\pi + 1} + \epsilon_n$$

pour tout $n \geq 1$, avec $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$.

Indication. Particulariser (ii) à $F(t) = \exp(2i\pi \log t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2i\pi+1}\exp(2i\pi\log t)\right)$.

(iv) Observer que le résultat de (iii) et le lemme 2 montrent que la suite $(\log n)_{n\geq 1}$ n'est pas équirépartie modulo 1.

**7. Exercice.** Montrer que la suite de $n$ième terme $(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^n$ n'est pas équirépartie modulo 1. [Indication. Si $x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ et $\xi = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, vérifier que $x^n + \xi^n$ est un entier pour tout $n \geq 0$, par récurrence sur $n$.]

*Complément.* Un *nombre de Pisot-Vijayaraghavan* est un nombre réel $x > 1$ pour lequel il existe un entier $m \geq 1$ et un polynôme $P(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, avec racines $\xi_1 = x, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \mathbb{C}$ telles que $|\xi_j| < 1$ pour $j = 2, \ldots, m$ ; l'entier $m$ est le *degré*[2] du nombre $x$. Par exemple, $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ est un tel nombre, racine de $X^2 - X - 1$ ; plus généralement, il en est de même de la racine $\frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2+4c})$ de $X^2 - bX - c$, pour toute paire d'entiers $(b, c)$ tels que $0 < c \leq b$. Banalement, tout nombre entier $k \geq 2$ est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan, de degré 1. Montrons qu'il existe des nombres de Pisot-Vijayaraghavan de tous degrés $\geq 1$.

Soit $P(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ de degré $m \geq 2$ tel que

$$(*) \qquad |a_{m-1}| > 1 + \sum_{i=0}^{m-2} |a_j| \qquad \text{et} \qquad 1 + \sum_{j=0}^{m-1} a_j < 0.$$

Pour tout nombre complexe $z$ tel que $|z| = 1$, nous avons

$$\left| z^m + \sum_{j=0}^{m-2} a_j z^j \right| \leq 1 + \sum_{j=0}^{m-2} |a_j| < \left| a_{m-1} z^{m-1} \right| = |a_{m-1}|.$$

Le théorème de Rouché implique que $P(X)$ possède exactement $m-1$ racines à l'intérieur du disque unité, et donc une $m$ième racine $x$ qui est à l'extérieur du disque unité et réelle. Comme $P(1) < 0$ et $P(y) > 0$ pour $y \in \mathbb{R}$ assez grand, nous avons $x > 1$. En d'autres termes, $x$ est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan.

Par exemple, pour tout entier $m \geq 2$ et pour tout nombre premier $p$, le polynôme $X^m - p^2X^{m-1} - p$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ par le critère d'Eisenstein (voir par exemple le théorème 2.5 dans [Stewa–73]) et possède une unique racine dans $]1, \infty[$ qui est un nombre de Pisot-Vijayaraghavan de degré $m$.

A titre de curiosité, citons quatre propriétés connues de l'ensemble $S$ des nombres de Pisot-Vijayaraghavan : c'est un sous-ensemble fermé dénombrable de $\mathbb{R}$, toute puissance $x^m$ ($m \geq 2$) d'un nombre de $S$ est encore dans $S$, le plus petit nombre de $S$ est la racine $x_{\min} \approx 1,3247179572\cdots$ du polynôme $X^3 - X - 1$, et le plus petit point d'accumulation de $S$ est $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. Pour en savoir plus sur ces nombres, voir [Salem–63] et [BDGPS–92].

Montrons que les puissances d'un nombre de Pisot-Vijayaraghavan ne sont pas équiréparties modulo 1. Soient $x$ un tel nombre et $P(X), \xi_1 = x, \xi_2, \ldots, \xi_m$ comme ci-dessus. Pour tout entier $n \geq 1$, le nombre

$$N_n(x) = \xi_1^n + \xi_2^n + \ldots + \xi_m^n$$

[2] C'est la notion usuelle de degré pour un entier algébrique.

est une expression symétrique en les racines de $P(X)$, donc peut s'écrire comme un polynôme à coefficients entiers en les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$ de $P(X)$. Il en résulte que $N_n(x)$ est un entier et que

$$|x^n - N_n(x)| \;=\; |\xi_2^n + \cdots + \xi_m^n| \;\le\; |\xi_2|^n + \cdots + |\xi_m|^n$$

tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. En particulier, la suite $(x^n)_{n\ge 1}$ n'est pas équirépartie modulo 1.

Voir aussi le complément 21 ci-dessous.

**8. De l'intervalle au cercle.** Il existe une application naturelle de l'intervalle $[0,1]$ sur le cercle[3] ; en formules :

$$\begin{cases} [0,1] & \longrightarrow \quad \mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ \quad t & \longmapsto \quad \exp(2i\pi t). \end{cases}$$

Ainsi, on peut identifier[4] l'intervalle $[0,1]$ à extrémités recollées, noté $[0,1]/\sim$, avec le cercle $\mathbb{T}^1$. Variante : on identifie de même l'espace quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ avec $\mathbb{T}^1$. Autrement dit, c'est "le même" groupe $\mathbb{T}^1$ qui est écrit parfois additivement

$$x + y \;=\; \{x+y\} \qquad \text{où} \quad x, y \in [0,1[$$

et parfois multiplicativement avec des produits $zw$ de deux nombres complexes $z, w$ de module 1.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La rotation du cercle d'angle $2\pi\alpha$, notée ici $R_\alpha$, s'écrit selon le point de vue

$$R_\alpha(t) \;=\; \{t + \alpha\} \qquad (0 \le t < 1)$$

ou

$$R_\alpha(z) \;=\; z e^{2i\pi\alpha} \qquad (z \in \mathbb{C}, |z| = 1).$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, notons $R_\alpha^n$ la rotation composition de $n$ copies de $R_\alpha$ (cum grano salis si $n < 0$) ; l'application

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{T}^1 & \longrightarrow \quad \mathbb{T}^1 \\ (n, x) & \longmapsto \quad R_\alpha^n(x) \end{cases}$$

définit une action du groupe $\mathbb{Z}$ sur le cercle. *L'orbite* d'un point $x_0 \in \mathbb{T}^1$ est alors la suite $(R_\alpha^n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ et *l'orbite future* de ce point est la suite $(R_\alpha^n(x))_{n\ge 0}$.

---

[3] Lorsque le cercle est manifestement un cas particulier de sphère, on le note souvent $\mathbb{S}^1$. La suite de ce chapitre montre qu'il convient ici de le voir comme cas particuier de tore, d'où la notation $\mathbb{T}^1$.

[4] Quitte à être pédant, définissons une relation d'équivalence $\sim$ sur $[0,1]$ par $t \sim t'$ si ou bien $t = t'$, ou bien $t = 0$ et $t' = 1$, ou bien $t = 1$ et $t' = 0$. La formule ci-dessus identifie alors l'espace quotient $[0,1]/\sim$ à $\mathbb{T}^1$.

**9. Reformulation du corollaire 5.** *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, l'orbite de tout point de $\mathbb{T}^1$ par la rotation $R_\alpha$ d'angle $2\pi\alpha$ est partout dense.*

*Preuve.* Cette reformulation, due à Jacobi (voir l'appendice 1 de [ArnAv–67]), est bien sûr une conséquence de ce qui précède. En voici une autre démonstration.

Pour tout $x \in \mathbb{S}^1$, les points de l'orbite future $(R_\alpha^n x)_{n\geq 0}$ sont distincts deux à deux. En effet, pour $n, m \geq 0$, l'égalité $\exp(2i\pi(t+m\alpha)) = \exp(2i\pi(t+n\alpha))$ implique $(m-n)\alpha \in \mathbb{Z}$, donc $m = n$ puisque $\alpha \notin \mathbb{Q}$. En particulier, l'orbite de $x$ est infinie. Comme le cercle est compact, cette orbite possède un point d'accumulation. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe des entiers $l, m$ tels que $0 \leq l < m$ et tels que

$$d(R_\alpha^m(x), R_\alpha^l(x)) \, < \, \epsilon$$

(où $d(x, y)$ désigne la distance entre deux points $x, y$ du cercle). Si $n = m - l$, alors $d(R_\alpha^n(x), x) < \epsilon$.

Il en résulte que les points $x, R_\alpha^n(x), R_\alpha^{2n}(x), R_\alpha^{3n}(x), \ldots$ divisent le cercle en intervalles de longueurs inférieures à $\epsilon$, d'où l'affirmation à montrer. □

**10. Flot irrationnel sur le tore $\mathbb{T}^2$.** Le tore $\mathbb{T}^2$ peut être vu d'au moins quatre manières :

(i) c'est le produit $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ de deux cercles ;
(ii) c'est l'espace quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ ;
(iii) c'est l'espace $[0,1]^2/\sim$ obtenu à partir d'un carré par identification convenable des paires opposées de côtés du bord ;
(iv) c'est une surface de révolution dans $\mathbb{R}^3$, engendrée par un cercle "vertical" de rayon $r < 1$ et de centre à distance 1 d'un axe vertical, tournant autour de l'axe, de sorte que la surface possède une paramétrisation de la forme

$$\begin{aligned} x &= (1 + r\cos\psi)\cos\varphi \\ y &= (1 + r\cos\psi)\sin\varphi \\ z &= r\sin\psi \end{aligned}$$

avec $0 \leq \psi, \varphi < 2\pi$.

(Comparer avec le numéro 8.)

Choisissons le point de vue selon lequel $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2/\sim$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ ; considérons les trajectoires dans $\mathbb{T}^2$ de la forme

$$(*) \qquad \begin{cases} x(t) = \{x_0 + t\} \\ y(t) = \{y_0 + \alpha t\} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Ce sont aussi les images dans $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ de droites de $\mathbb{R}^2$ faisant avec le premier axe un angle $\theta$ tel que

$$\tan\theta = \alpha,$$

ou encore des solutions du système différentiel

$$(**) \qquad \dot{x} = 1 \qquad \dot{y} = \alpha.$$

Si l'image dans le tore $\mathbb{T}^2 = [0,1]^2/\sim$ d'une telle droite coupe le cercle d'équation $x = 0$ en un point $y_0$, elle recoupe le même cercle aux points $y_n = \{y_0 + n\alpha\}$.

Les images de $\mathbb{R}$ par les trajectoires $(*)$ sont compactes lorsque $\alpha$ est rationnel

Au contraire, si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, les applications $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^2$ de la forme $(*)$ sont toutes injectives, et d'images denses dans $\mathbb{T}^2$ en vertu du numéro 9. Elles définissent une action

$$\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{T}^2$$

qu'on appelle un *flot irrationnel* sur le tore de dimension 2.

**11. Exercice.** On considère la trajectoire (*) lorsque $(x_0, y_0) = (0, \epsilon)$, où $\epsilon > 0$ un nombre *petit.*

(i) Dessiner la trajectoire dans les cas suivants : $\alpha = 1/5$, $\alpha = 2/3$, $\alpha$ un nombre irrationnel.

(ii) Lorsque $\alpha \in \mathbb{Q}$, déterminer le plus petit nombre réel $T > 0$ tel que les trajectoires correspondantes soient périodiques de période $T$.

(iii) Soit $\rho : [0,1] \longrightarrow [0,1/2]$ la fonction définie par $\rho(t) = t$ si $0 \leq t \leq 1/2$ et $\rho(t) = 1-t$ sinon. Notons $\tilde{q} : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1/2]^2$ la fonction définie par $\tilde{q}(x,y) = (\rho(x), \rho(y))$, et $q : \mathbb{T}^2 = ([0,1]^2/\sim) \longrightarrow [0,1/2]^2$ l'application quotient.

Dessiner les images par $q$ des trajectoires dessinées en (i).

**12. Billard dans un carré.** Une balle de billard se déplace sur une table carrée, en suivant à chaque rebond contre un bord la loi de l'optique géométrique (l'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence) ; dans le cas exceptionnel d'une balle arrivant sur un coin, la balle retourne sur son chemin d'arrivée (ce qu'on peut justifier par un argument de continuité).

Variation : les considérations qui précèdent s'appliquent aussi à un rayon lumineux dans un carré à bords fait de miroirs.

Considérons une trajectoire de billard dont un segment fait avec le "côté horizontal" de la table un angle $\theta$ ; les angles des autres segments sont alors $\pi - \theta$, $-\theta$, $\pi + \theta$. Notons que les tangentes des quatre angles $\theta$, $\pi - \theta$, $-\theta$ et $\pi + \theta$ sont ou bien toutes rationnelles, ou bien toutes irrationnelles.

**Proposition.** *Une trajectoire de billard carré dont l'un des segments fait avec le côté horizontal un angle à tangente rationnelle est fermée périodique.*

*Une trajectoire de billard carré dont l'un des segments fait avec le côté horizontal un angle à tangente irrationnelle est partout dense.*

*Indication de preuve.* Une trajectoire de billard dans un carré $C$ est une image d'une trajectoire du numéro précédent dans un carré $2C$.

*Exercice.* Variante courte : lire le No 23.3 de [HarWr–79]. Variante plus riche : lire [KönSz–13].

*Exercice.* Formuler une alternative "fermées / denses" pour les trajectoires d'un billard rectangulaire.

**13. Exercice** (préliminaire au numéro 14). Calculer

$$\int_{[0,1]^2} \exp(2i\pi(k_1 t_1 + k_2 t_2)) dt_1 dt_2$$

pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$.

**14. Généralisation aux dimensions supérieures.** Soit $d$ un entier, $d \geq 1$. (Le cas $d = 1$ est celui de ce qui précède.) Le *cube unité* est le produit $[0,1]^d$.

Soient $I_1, \ldots, I_d$ des sous-intervalles de $[0,1]$ ; si $I \subset [0,1]^d$ désigne leur produit $I_1 \times \cdots \times I_d$, nous notons $\chi_I : [0,1]^d \longrightarrow \mathbb{R}$ sa fonction caractéristique et $|I| = \prod_{i=1}^d |I_i|$ son volume. Nous écrivons $x_1, \ldots, x_d$ les coordonnées d'un point $x \in [0,1]^d$ (ou $x \in \mathbb{R}^d$) et $(x(n))_{n\geq 1} = (x_1(n), \ldots, x_d(n))_{n\geq 1}$ une suite infinite de points de $[0,1]^d$. Dans l'écriture $x_i$, l'indice $i$ n'est donc pas de même nature qu'aux numéros précédents !

Si $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, alors $\{x\}$ est par définition le $d$-uplet $(\{x_1\}, \ldots, \{x_d\})$.

Une suite infinie $(x(n))_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}^d$ est *équirépartie modulo* 1 si, pour tout rectangle $I = I_1 \times \cdots \times I_d \subset [0,1]^d$ comme ci-dessus, la suite définie par

$$s_n \;=\; \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_I(\{x_1(n)\}, \ldots, \{x_1(n)\}) \tag{i}$$

converge vers $|I|$. On montre comme au lemme 1 que cette condition est équivalente à chacune des deux suivantes :

(ii) la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\{x(j)\})\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\int_{[0,1]^d} f(t)dt$ pour toute fonction continue $f : [0,1]^d \longrightarrow \mathbb{C}$ périodique aux bords[5] ;

(iii) la suite $\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \exp(2i\pi(k_1 x_1(j) + \cdots + k_d x_d(j))\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0 pour tout $(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $(k_1, \ldots, k_d) \neq (0, \ldots, 0)$.

**15. Théorème.** *Soit* $x(0) \in \mathbb{R}^d$ *; soit* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ *un vecteur tel que les* $d+1$ *nombres* $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants. Alors la suite définie par*

$$x(n) \;=\; x(0) + n\alpha$$

*est équirépartie modulo* 1.

**16. Corollaire.** *Soient* $x(0)$*,* $\alpha$ *et* $(x(n))_{n\geq 1}$ *comme au théorème précédent. Alors la suite* $(\{x(n)\})_{n\geq 1}$ *est dense dans* $[0,1]^d$.

**16'. Enoncé équivalent.** *Soient* $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ *des nombres réels tels que* $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ *sont* $\mathbb{Q}$*-linéairement indépendants et soient* $t_1, \ldots, t_d \in [0,1]$.

*Pour tous* $x_1, \ldots, x_d \in [0,1[$ *et* $\epsilon > 0$*, il existe des entiers* $m_1, \ldots, m_d \in \mathbb{Z}$ *et un entier* $n \geq 1$ *tels que*

$$|x_j + n\alpha_j - m_j - t_j| \;<\; \epsilon \qquad \textit{pour} \quad j = 1, \ldots, d.$$

Ce résultat est dû à Kronecker. Voir [HarWr–79], la page 382 et tout le chapitre XXIII.

**17. Exercice (illustration de mécanique céleste).** Lire le No 23.6 de [HarWr–79].

[5] C'est-à-dire telle que

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_d) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_d)$$

pour tous $i \in \{1, \ldots, d\}$ et $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d \in [0,1]$.

**18. Exercice (billard dans un cube).** On considère les trajectoires de billard à l'intérieur du cube $C = \{(x_i)_{1 \leq i \leq 3} \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_i \leq \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2, 3)\}$

(i) Dessiner à l'intérieur de $C$ un prisme $P$ dont la base est un rectangle, inscrit dans le carré $C = \{(x_i)_{1 \leq i \leq 2} \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x_i \leq \frac{1}{2} \quad (i = 1, 2)\}$ et à côtés parallèles aux diagonales du carré.

(ii)$^\sharp$ On considère une trajectoire de billard de position initiale à l'intérieur d'une des faces "verticales" de $P$ et de vitesse intiale $(\alpha, \beta, \gamma)$ telle que $\alpha + \beta = 0, \alpha \neq 0, \gamma/\alpha \notin \mathbb{Q}$. Vérifier que la trajectoire est dense dans la réunion des quatres faces verticales de $P$.

(iii) Dessiner à l'intérieur de $C$ un tétraèdre régulier $T$ dont les sommets sont 4 des 8 sommets de $C$. (Il y a deux possibilités).

(iv)$^{\sharp\sharp}$ Montrer qu'il existe des trajectoires de billard denses dans $T$.

(Exercice inspiré de [KönSz–13].)

**19. Équidistribution modulo 1 des valeurs d'un polynôme aux points entiers.** *Soient $m \geq 1$ un entier, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ des nombres réels tels que l'un au moins de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ soit irrationnel, et $P(X) = \alpha_m X^m + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$ le polynôme correspondant. Alors la suite $(P(n))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo* 1 (c'est encore un résultat de [Weyl–16]).

Voici le début de la preuve de ce résultat. Le cas $m = 1$ étant celui du théorème 4, nous supposons désormais que $m \geq 2$. Dans un premier temps, supposons de plus que $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ et que $\alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{Q}$.

Introduisons le polynôme $\tilde{P}(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(X) = \tilde{P}(X) + \alpha_1 X + \alpha_0$. Soit $D \geq 1$ un entier tel que $D\alpha_2, \ldots, D\alpha_m \in \mathbb{Z}$ ; nous avons $\{\tilde{P}(sD + t)\} = \{\tilde{P}(t)\}$ pour tous $s, t \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ ; soient $n \geq 1$ un entier et $n = qD + r$ le résultat d'une division euclidienne de $n$ par $D$, avec $q \geq 0$ et $1 \leq r \leq D$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp\Big(2i\pi k P(j)\Big) \\
&\quad = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{t=1}^{D} \exp\Big(2i\pi k (\tilde{P}(sD + t) + \alpha_1 (sD + t) + \alpha_0)\Big) + \sum_{u=qD+1}^{n} \exp\Big(2i\pi k P(u)\Big) \right\} \\
&\quad = \sum_{t=1}^{D} \exp\Big(2i\pi k (\tilde{P}(t) + \alpha_1 t + \alpha_0)\Big) \left( \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{q-1} \exp\Big(2i\pi k \alpha_1 D s\Big) \right) + \frac{1}{n} \sum_{u=1}^{r} \exp\Big(2i\pi k P(qD + u)\Big)
\end{aligned}$$

et

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp\Big(2i\pi k P(j)\Big) \right| \leq D \left| \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{q-1} \exp\Big(2i\pi k \alpha_1 D s\Big) \right| + \frac{r}{n} \leq \left| \frac{1}{q} \sum_{s=0}^{q-1} \exp\Big(2i\pi k \alpha_1 D s\Big) \right| + \frac{D}{n}.$$

Comme $\alpha_1 D \notin \mathbb{Q}$, la suite $(\alpha_1 D s)_{s \geq 0}$ est équirépartie modulo 1 (nous utilisons ici le théorème 4), donc $\left| \frac{1}{q} \sum_{s=0}^{q-1} \exp(2i\pi k \alpha_1 D s) \right|$ tend vers 0 lorsque $q$ (c'est-à-dire $n$) tend vers l'infini. Il en résulte que $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \exp(2i\pi k P(j)) \right| = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, et donc que la suite $(P(n))_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1.

Ceci est le premier pas d'un argument par récurrence sur le plus grand entier $l \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $\alpha_l \notin \mathbb{Q}$. Pour la suite de la démonstration, voir si nécessaire le théorème 3.2 du chapitre 1 dans [KuiNi–74].

Considérer le cas particulier d'un polynôme de la forme $\alpha X^m$, avec $\alpha$ irrationnel, revient à considérer une sous-suite de la suite $(n\alpha)_{n \geq 0}$. De nombreuses autres sous-suites ont été étudiées. Par exemple, si $p_n$ désigne le $n$ième nombre premier, Vinogradov a montré que la suite $(p_n \alpha)_{n \geq 1}$ est équirépartie modulo 1 pour tout $\alpha$ irrationnel.

**20. Exercice.** Imaginer des opérations qui, étant donné une suite équirépartie modulo 1, fournissent d'autres suites équiréparties modulo 1.

Suggestions : translater modulo 1, ajouter terme à terme une suite convergente modulo 1, extraire la sous-suite des termes d'indices pairs, ...

**21. Complément.** Soit $x$ un nombre réel positif ; il est naturel de demander si la suite $(x^n)_{n\geq 1}$ de ses puissances est équirépartie modulo 1. La réponse peut être négative, évidemment si $x \leq 1$ ou pour des raisons simples dans certains autres cas (voir l'exercice 7). Mais on ignore si des suites comme $(e^n)_{n\geq 1}$, $(\pi^n)_{n\geq 1}$ ou $((3/2)^n)_{n\geq 1}$ sont équiréparties modulo 1. En fait, on ne connait explicitement aucun nombre $x$ dont on puisse assurer que la suite $(x^n)_{n\geq 1}$ soit équirépartie modulo 1. Autant que je sache, personne ne doute que $(\pi^n)_{n\geq 1}$ soit équirépartie modulo 1, et certaines méthodes numériques qui utilisent ce "fait" sont tout à fait efficaces.

En revanche, on sait démontrer l'assertion suivante : *pour presque tout nombre réel $x \geq 1$, la suite $(x^n)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo* 1 (avec "presque tout" au sens de la mesure de Lebesgue) ; voir le corollaire 4.2 du chapitre 1 dans [KuiNi–74]. Certains ingrédients de la preuve de cette assertion se retrouvent ci-dessous.

**22. Théorème.** *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres entiers naturels distincts deux à deux. Pour presque tout nombre réel $x$, la suite $(a_n x)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo* 1.

*Remarque.* Lorsque $a_n = n$ pour tout $n \geq 1$, il s'agit d'une version faible du théorème 4.

*Démonstration (reproduite de* [KuiNi–74]*).* Soit d'abord $x \in [0,1]$. Soit $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Pour $n \geq 1$, posons

$$S_k(n,x) \,=\, \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \exp(2i\pi k a_r x).$$

Pour tout $m \geq 1$ :

$$|S_k(m,x)|^2 \,=\, \overline{S_k(m,x)} S_k(m,x) \,=\, \frac{1}{m^2}\sum_{r,s=1}^{m} \exp(2i\pi k(a_s - a_r)x)$$

et

$$\int_0^1 |S_k(m,x)|^2 dx \,=\, \frac{1}{m^2}\sum_{r,s=1}^{m}\int_0^1 \exp(2i\pi k(a_s - a_r)x)dx \,=\, \frac{1}{m}$$

donc

$$\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^1 |S_k(m^2,x)|^2 dx \,=\, \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2} \,<\infty.$$

Le lemme de Fatou implique que

$$\int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} |S_k(m^2,x)|^2 dx \,<\, \infty.$$

En particulier, pour presque tout $x \in [0,1]$, nous avons $\sum_{m=1}^{\infty} |S_k(m^2,x)|^2 < \infty$, et a fortiori $\lim_{m\to\infty} |S_k(m^2,x)| = 0$.

Considérons un entier $n \geq 1$. Soit $m \geq 1$ l'entier tel que $m^2 \leq n < (m+1)^2$. Alors

$$|S_k(n,x)| \leq |S_k(m^2,x)| + \frac{2m}{n} \leq |S_k(m^2,x)| + \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

Il en résulte que

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} |S_k(n,x)| = 0 \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0, \text{ pour presque tout } x \in [0,1].$$

Le lemme 2 implique que la suite $(a_n x)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout $x \in [0,1]$.

Soit enfin $y \in \mathbb{R}$ ; notons $N$ la partie entière de $y$ et $x = \{y\}$ sa partie fractionnaire. Alors $\{a_n y\} = \{a_n N + a_n x\} = \{a_n x\}$ pour tout $n \geq 1$. Vu ce qui précède, la suite $(a_n y)_{n\geq 1}$ est équirépartie modulo 1 pour presque tout $y \in [N, N+1]$. C'est encore vrai pour presque tout $y \in \mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable des intervalles $[N, N+1]$. □

**23. Remarque.** Soit $X_+ = \prod_{j=1}^{\infty} I_j$ le produit d'une infinité de copies $I_j$ de l'intervalle $[0,1]$, muni de la $\sigma$-algèbre des parties boréliennes et du produit $\lambda_\infty$ des mesures de Lebesgue sur les $I_j$. Toute suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de nombres réels dans $[0,1]$ s'identifie donc à un point de $X_+$. Dans ce sens, on peut montrer que $\lambda_\infty$-presque toutes les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ sont équiréparties modulo 1 (théorème 2.2 du chapitre 3 dans [KuiNi–74]).

**24. Exercice.** Pour tout entier $n \geq 0$, soit

$$2^n = a_{k(n)}(n) a_{k(n)-1}(n) \cdots a_1(n) \qquad \text{ou plus précisément} \qquad 2^n = \sum_{j=1}^{k(n)} a_j(n)\, 10^j$$

l'écriture décimale de $2^n$, avec

$$a_{k(n)}(n), \ldots, a_1(n) \in \{0, 1, \ldots, 9\} \qquad \text{et} \qquad a_{k(n)}(n) \neq 0.$$

(i) Vérifier que la suite $(a_1(n))_{n\geq 1}$ est périodique de période 4.

(ii) Vérifier que la suite $(a_2(n)a_1(n))_{n\geq 4}$ est périodique de période 20. [C'est même le cas de $(a_2(n)a_1(n))_{n\geq 2}$ si on convient d'écrire $2^2 = 04$ et $2^3 = 08$.]

(iii) Montrer que la suite $(a_3(n)a_2(n)a_1(n))_{n\geq 7}$ est ultimement périodique. Enoncer une généralisation de cette assertion.

(iv) Pour $n \geq 1$, notons $a_n = a_{k(n)}(n)$ le premier chiffre non nul de l'écriture décimale de $2^n$. Pour $j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, posons

$$\tau(j,n) = \frac{\sharp\{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n \quad \text{et} \quad a_m = j\}}{n}.$$

Par exemple :

$$\begin{array}{rclrclrcl}
\tau(1,10) & = & 3/10 & \tau(4,10) & = & 1/10 & \tau(7,10) & = & 0 \\
\tau(2,10) & = & 2/10 & \tau(5,10) & = & 1/10 & \tau(8,10) & = & 1/10 \\
\tau(3,10) & = & 1/10 & \tau(6,10) & = & 1/10 & \tau(9,10) & = & 0 \\
\cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\
\tau(7,50) & = & 1/50 & \tau(8,50) & = & 5/50 & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

Montrer que, pour tout $j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, la suite $\big(\tau(j,n)\big)_{n\geq 1}$ possède une limite $\tau(j)$ lorsque $n \to \infty$, et que

$$\tau(1) \, < \, \tau(2) \, < \, \tau(3) \, < \, \tau(4) \, < \, \tau(5) \, < \, \tau(6) \, < \, \tau(7) \, < \, \tau(8) \, < \, \tau(9).$$

Estimer $\tau(7)/\tau(8)$ et $\tau(1)/\tau(9)$.

[Indication. L'égalité $a_n = j$ a lieu si et seulement s'il existe un entier $r = r(n)$ tel que $j\,10^r \leq 2^n < (j+1)\,10^r$, c'est-à-dire si et seulement si $r + \log j \leq n \log 2 < r + \log(j+1)$, ou encore si et seulement si $\{n \log 2\} \in [\log(j), \log(j+1)[$, où log désigne un logarithme en base 10. Il résulte du théorème d'équidistribution de Weyl que $\tau(j) = \log\left(\frac{j+1}{j}\right)$.

Pour estimer $\tau(1)/\tau(9)$ sans calculette à disposition, vérifier que $9^6 > 0,5 \times 10^6$ et $9^7 < 0,5 \times 10^7$, de sorte que $(10/9)^6 < 2 < (10/9)^7$.]

(v) Vérifier qu'un entier $N > 1$ tel que $\log N \in \mathbb{Q}$ est nécessairement une puissance de 10. [Indication : utiliser l'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers.]

(vi) Soit $a \geq 2$ un entier qui n'est pas une puissance de 10. Enoncer et montrer l'analogue de l'assertion (iv) pour les puissances de $a$.

(vii) Enoncer et montrer l'analogue de (v) pour les puissances d'un nombre $a \geq 2$ écrites "en base $b$", où $b \geq 2$ est un entier "convenable". Cela fait partie de l'exercice de préciser le mot "convenable" [indication : il faut que l'analogue de (v) soit vrai pour les logarithmes en base $b$].

**25. Complément.** Soit à nouveau $\alpha \in \mathbb{Q}$ un nombre irrationnel, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $x_n = \{x_0 + n\alpha\}$. Il est naturel de demander ce qu'il est possible de dire de limites du type

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(x_n) \; = ???$$

pour la fonction caractéristique $\chi_A$ d'un ensemble $A \subset [0, 1[$ mesurable au sens de Lebesgue. L'énoncé du théorème 4 ne peut pas valoir sans changement ! (penser au cas où $A$ est le complémentaire dans $[0, 1]$ des valeurs prises par la suite).

C'est un cas particulier du *théorème ergodique de Birkhoff* (publié en 1931) que la limite de (*) existe et vaut la mesure de $A$ pour presque tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Ce théorème est l'objet du chapitre 7 du cours.

Le théorème 4 a été étendu par H. Weyl à d'autres suites d'entiers ; par exemple :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_I\left(\{\alpha_m j^m + \cdots + \alpha_1 j + \alpha_0\}\right) \; = \; |I|$$

pour $I$ un sous-intervalle de $[0, 1]$ et $\alpha_m, \ldots, \alpha_0 \in \mathbb{R}$ avec l'un au moins de $\alpha_m, \ldots, \alpha_1$ irrationnel (numéro 19). L'étude de sommes du type

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \chi_I(\{\alpha_1 p_j + \alpha_0\}), \qquad \text{où } p_j \text{ désigne le } j\text{ième nombre premier,}$$

intervient apparemment dans certaines approches (Vinogradov, Hua [Hua–65]) de problèmes classiques d'arithmétique tels que le problème de Waring[6] et le problème de Goldbach[7].

De même le théorème de Birkhoff a été étendu par J. Bourgain dans les années 80, comme suit. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et $T : X \longrightarrow X$ une application mesurable préservant la mesure $\mu$. Soit $Q(X) = \alpha_m X^m + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0$ un polynôme à coefficients réels, tel que $m \geq 1$ et $\alpha_m > 0$ ; on désigne par $[Q(j)]$ la partie entière du nombre réel $Q(j)$. Soit $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Alors les sommes

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^{[Q(j)]}(x)\right)$$

convergent pour $\mu$-presque tout $x \in X$. Ou encore, si $p_n$ désigne comme plus haut le $n$ième nombre premier, les sommes

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(T^{p_j}(x)\right)$$

convergent pour $\mu$-presque tout $x \in X$. Voir par exemple [Thouv–90].

## Références


ArnAv–67. V.I. Arnold et A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, 1967.

BDGPS–92. M.J. Bertin, A. Decomps-guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse et J.P. Schreiber, *Pisot and Salem numbers*, Birkhäuser, 1992.

CheWe–57. C. Chevalley et A. Weil, *Hermann Weyl (1885–1955)*, l'Enseignement Math. **3** (1957), 157–187.

HaiWa–96. E. Hairer et G. Wanner, *Analysis by its history*, Springer, 1996.

HarWr–79. G.H. Hardy et E.M. Wright, *An introduction to the theory of numbers (fifth edition)*, Oxford Univ. Press, 1979.

Hua–65. L.K. Hua, *Additive theory of prime numbers*, Transl. Math. Monographs 13, Amer. Math. Soc., 1965.

KönSz–13. D. König et A. Szücs, *Mouvement d'un point abandonné à l'intérieur d'un cube*, Rendiconti del circolo matematico di Palermo **36** (1913), 79–90.

KuiNi–74. L. Kuipers et H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, J. Wiley, 1974.

Rudin–76. W. Rudin, *Principles of mathematical analysis (third edition)*, McGraw-Hill, 1976.

Salem–63. R. Salem, *Algebraic numbers and Fourier analysis*, Heath, 1963.

Stewa–73. I. Stewart, *Galois theory*, Chapman and Hall, 1973.


[6] Problème de Waring : étant donné un entier $k \geq 2$, quel est le plus petit nombre $g(k)$ tel que tout nombre entier soit somme de $g(k)$ puissances $k$-ièmes. Variante : Quel est le plus petit nombre $G(k)$ tel que tout nombre entier *assez grand* soit somme de $G(k)$ puissances $k$-ièmes. Par exemple : $G(2) = g(2) = 4$, et $G(4) = 16 < g(4) = 19$. (Il existe exactement 96 nombres qui *ne sont pas* sommes de 16 puissances quatrièmes, et le plus grand d'entre eux est 13 792.)

[7] Problème : montrer que tout entier $n > 5$ est somme de trois nombres premiers. Goldbach a exprimé la conviction que c'est le cas dans une lettre à Euler de 1742. Euler répondit qu'il suffirait de montrer que tout entier pair $\geq 4$ est somme de deux nombres premiers. Exemples confirmant la conjecture : $96 = 7 + 89$, $98 = 19 + 79$, et $100 = 3 + 97 = 11 + 89 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53$. Depuis les travaux de Hardy & Littlewood (1923) et Vinogradov (1937), on sait que tout entier *impair et "assez grand"* est somme de trois nombres premiers (pour être "assez grand" ici, il suffit par exemple d'être plus grand que $3^{3^{15}}$). La conjecture elle-même, à savoir que tout nombre entier pair est somme de deux nombres premiers, est toujours ouverte.

Thouv–90. J.-P. Thouvenot, *La convergence presque sûre des moyennes ergodiques suivant certaines sous-suites d'entiers [d'après Jean Bourgain]*, in "Séminaire bourbaki, 719, novembre 1989, Astérisque **189-190** (1990), 133–153.
Walte–82. P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer, 1982.

## Chapitre 2 – NOTIONS DE SYSTÈME DYNAMIQUE

Nous suivons ici une partie de l'introduction d'un livre de Hillel Furstenberg [Furst–81]. Le lecteur est prié de noter le pluriel du titre, justifié par l'ambiguité de la notion lorsque le contexte n'est pas parfaitement précisé.

**1. Mécanique classique.** La définition classique d'un système dynamique est bien adaptée aux systèmes de la mécanique classique décrivant le mouvement d'un point de l'espace $\mathbb{R}^d$ en fonction du temps. Les trajectoires $t \longmapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))$ sont des solutions d'un système différentiel

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(x_1, \dots, x_d) \qquad 1 \le i \le d \tag{1}$$

où les $V_i$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$ indépendantes du temps qui, dans les cas favorables, sont localement lipschitziennes.

Le théorème fondamental d'existence des solutions pour les équations différentielles ordinnaires garantit alors que, pour tout $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_d^{(0)}) \in \mathbb{R}^d$, il existe une unique solution

$$t \longmapsto x\big(t; x^{(0)}\big) = \Big(x_1\big(t; x_1^{(0)}, \dots, x_d^{(0)}\big), \dots, x_d\big(t; x_1^{(0)}, \dots, x_d^{(0)}\big)\Big) \tag{2}$$

de (1) définie et différentiable pour tout $t \in \mathbb{R}$, telle que $x\big(0; x^{(0)}\big) = x^{(0)}$, et telle que l'application

$$\big(t; x^{(0)}\big) \longmapsto x\big(t; x^{(0)}\big)$$

de $\mathbb{R}^{d+1}$ dans $\mathbb{R}^d$ est continue. De plus, il résulte du théorème d'unicité pour les solutions des équations différentielles et de l'indépendance des $V_i$ du temps que

$$x\big(t + t'; x^{(0)}\big) = x(t; x(t'; x^{(0)})) \tag{3}$$

pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$ et $x^{(0)} \in \mathbb{R}^d$.

Pour les solutions (2), le temps $t$ est considéré comme une variable et la condition initiale $x^{(0)}$ comme un paramètre. En échangeant les rôles, on définit pour tout paramètre $t$ une transformation

$$T_t \,:\, x^{(0)} \longmapsto x(t; x^{(0)})$$

de $\mathbb{R}^d$, et (3) s'écrit alors

$$T_{t+t'} = T_t T_{t'} \tag{4}$$

(le terme de droite est la composition des deux transformations $T_{t'}$ et $T_t$). La famille des transformations $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ de $\mathbb{R}^d$ constituent un *groupe à un paramètre* au sens où elle satisfait (4) ainsi que

$$T_0 = \mathrm{id}\,. \tag{5}$$

En particulier, $T_t$ est inversible d'inverse $T_{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Voici une autre manière d'écrire la même chose : l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d \\ (t; x^{(0)}) \longmapsto T_t(x^{(0)}) \end{cases} \tag{6}$$

est une *action* par homéomorphismes du groupe additif $\mathbb{R}$ sur l'espace $\mathbb{R}^d$ ; c'est de plus une action continue (ce qui veut dire que l'application (6) est continue).

Si les équations (1) décrivent un système mécanique classique qui possède des *intégrales premières* (ou "lois de conservation", par exemple de l'énergie ou du moment cinétique), toute solution (2) reste dans une sous-variété $M$ de $\mathbb{R}^d$ définie par les grandeurs conservées, de sorte que l'action (6) fournit par restriction une action de $\mathbb{R}$ sur $M$. (La sous-variété $M$ peut avoir des singularités.)

**2. Vers une définition.** Il est ainsi naturel de définir un *système dynamique classique* comme la donné d'un espace $X$ muni d'une action de $\mathbb{R}$ ; on dit aussi "muni d'un groupe à un paramètre" $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$, où les $T_t$ sont cette fois des transformations de $X$. La *trajectoire* ou *l'orbite* d'un point $x \in X$ désigne l'application

$$\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow X \\ t \longmapsto T_t(x) \end{cases}$$

ou parfois l'image de cette application.

Les questions principales du sujet concernent le comportement de la trajectoire pour $t$ grand (ou $|t|$ grand). De plus, l'espace $X$ est muni de certaines structures conservées par le groupe de transformation $(T_t)_{t\in\mathbb{R}}$ : si $X$ est un espace topologique, $T_t$ est un homéomorphisme pour tout $t$ ; ou, si $X$ possède une mesure, $T_t$ préserve cette mesure pour tout $t$ (voir les chapitres suivants).

Il y a plusieurs variantes importantes. On peut s'intéresser aux seuls cas des temps entiers, c'est-à-dire à une action de la forme

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times X \longrightarrow X \\ (n, x) \longmapsto T^n(x) \end{cases}$$

où, pour tout $n \geq 0$ [respectivement $n \leq 0$], la transformation $T^n$ est la composée de $n$ copies de $T$ [resp. de $T^{-1}$].

On peut aussi s'intéresser à des transformations non inversibles $(T_t)_{t\geq 0}$ formant un *semi-groupe,* c'est-à-dire vérifiant (4) pour tous $t, t' \in \mathbb{R}_+$ ainsi que (5). Ou encore l'analogue de (4) $T_n T_{n'} = T_{n+n'}$ pour des "temps discrets" positifs $n, n' \in \mathbb{N}$ ainsi que (5). Il se peut même qu'il soit intéressant de remplacer le groupe $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ par un autre groupe, ou $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{N}$ par un autre semi-groupe : $\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}^2, SL_2(\mathbb{R}), SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{N}^2, \ldots$.

Il est prévu que l'essentiel de ce cours soit consacré aux groupes et semi-groupes de transformations $(T_n)_n$ d'un espace de probabilité. Le chapitre suivant expose quelques préliminaires de théorie de la mesure.

**3. Exemple, rotations du cercle.** Dans le cas où c'est le cercle $\mathbb{T}^1$ qui joue le rôle de $X$, une rotation $R_\alpha$ fournit le système dynamique

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{T}^1 \\ (n, x) \longmapsto R_\alpha^n(x) \end{cases}$$

(voir le chapitre précédent pour les notations). Plus généralement, pour $d \geq 1$, on associe à des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ un système dynamique

$$\begin{cases} \mathbb{Z} \times \mathbb{T}^d & \longrightarrow & \mathbb{T}^d \\ (n, x_1, \ldots, x_d) & \longmapsto & (R^n_{\alpha_1}(x_1), \ldots, R^n_{\alpha_d}(x_d)) \end{cases}$$

qui préserve la mesure naturelle sur $\mathbb{T}^d$.

**4. Exemple.** Soit $Y$ un ensemble fini. Notons

$$X \;=\; \prod_{-\infty}^{\infty} Y$$

le produit d'un nombre infini de copies de $Y$ indexées par $\mathbb{Z}$. Un élément de $X$ est une suite $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ où $x_i \in Y$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. La transformation $T$ de $X$ définie par

$$(Tx)_i \;=\; x_{i+1} \qquad i \in \mathbb{Z}$$

est appelée le *décalage*, ou plus précisément le décalage bilatéral vers la gauche (en anglais "shift"). La transformation $T$ est inversible, d'inverse le décalage vers la droite, et $(T^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ fournit une action de $\mathbb{Z}$ sur $X$.

De même,

$$X_+ \;=\; \prod_{0}^{\infty} Y$$

est l'espace des suites $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $Y$ indexés par $\mathbb{N}$ et la transformation $T$ de $X_+$ définie par

$$(Tx)_i \;=\; x_{i+1} \qquad i \in \mathbb{N}$$

est le *décalage unilatéral*, non inversible (dès que $Y$ contient au moins deux éléments).

**5. Exercice.** Soit $Y$ un ensemble fini, $X = \prod_{-\infty}^{\infty} Y$, et $T : X \longrightarrow X$ le décalage bilatéral, comme ci-dessus. On considère un entier $N \geq 1$. Vérifier qu'il existe une suite $u \in X$ avec la propriété suivante : pour tout $x \in X$, il existe un entier $n$ tel que telle que $(T^n u)_i = x_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ tel que $|i| \leq N$.

## References

Furst–81. H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton Univ. Press, 1981.

## PLAN DU COURS

1. Equirépartition modulo 1 d'après Hermann Weyl. Voir ci-dessus.
2. Notions de système dynamique. Voir ci-dessus.
3. Préliminaires de théorie de la mesure. Voir [Walte–82], pages 3-6.
4. Intégration. [Walte–82], pages 6-8.
5. Transformations préservant une mesure finie et théorème de récurrence de Poincaré. [Walte–82], pages 19-26.
6. Ergodicité. [Walte–82], pages 26-34.
7. Le théorème d'ergodicité de Birkhoff. Voir Y. Katznelson et B. Weiss, *Simple proof of some ergodic theorems,* Israel J. Math. **42** (1982) 291–296.
8. Applications du théorème de Birkhoff. (1) Les nombres normaux. (2) La loi des grands nombres. (3) Une caractérisation de l'ergodicité. (4) Le théorème ergodique $L^p$ de von Neumann.
9. Propriétés mélangeantes. [Walte–82], pages 39–47.
10. Le Hasard et la nécessité[8] – digression historico-culturelle. Voir par exemple : P. Collet et J.-P. Eckmann, *Iterated maps on the interval as dynamical systems,* Birkhäuser, 1980, et A. Dahan Damledico, J.-L. Chabert, K. Chemla, et autres auteurs, *Chaos et déterminisme*, Le Seuil, 1992.
11. Quelques propriétés spectrales.
12. Isomorphismes et isomorphismes spectraux. Pour 11 et 12 : [Walte–82], pages 48–49 et quelques points du chapitre 2.

## EXERCICES

### Série I distribuée le 1er novembre 2004

(1) Soit $\mathbb{T}^1$ le groupe du cercle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

(a) Classer les sous-groupes fermés de $\mathbb{T}^1$.

(b) Montrer que le groupe $\mathbb{T}^1$ possède une famille non dénombrable ds sous-groupes distincts deux à deux.

(c) Montrer que le groupe $\mathbb{T}^1$ possède exactement deux automorphismes continus, à savoir l'identité et l'application $z \longmapsto -z$.
[Indication. Soit $\theta$ un automorphisme continu de $\mathbb{T}^1$. Vérifier que $\theta$ préserve 1 et $-1$, ainsi que $\{i, -i\}$. Pour chacun des cas ($\theta(i) = i$ et $\theta(-i) = (-i)$), considérer ensuite l'action de $\theta$ sur les racines de l'unité d'ordres 8, 16, etc.]

(d) Montrer que tout homomorphisme continu de $\mathbb{T}^1$ dans $\mathbb{T}^1$ est de la forme $z \longmapsto z^n$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

[8] Il s'agit bien sûr du titre d'un livre marquant de Jacques Monod (Le Seuil, 1970).

[Indication. Utiliser le résultat de (a) pour ramener l'étude d'un homomorphisme non constant à celle d'un isomorphisme, puis utiliser (c).]

(e) Pour un entier $d \geq 1$, classer les homomorphismes continus de $\mathbb{T}^d$ dans $\mathbb{T}^1$.

(f) Décrire l'ensemble des endomorphismes continus de $\mathbb{T}^d$ à l'aide de l'espace $M_d(\mathbb{Z})$ des matrices $n$-fois-$n$ à coefficients entiers rationnels.

(g) Soit $\theta$ un endomorphisme continu de $\mathbb{T}^d$ et $a \in M_d(\mathbb{Z})$ la matrice correspondante au sens de (f). Enoncer une condition sur $a$ équivalente à la surjectivité de $\theta$, et une condition sur $a$ équivalente au fait que $\theta$ soit un automorphisme du groupe $\mathbb{T}^d$.

(2) Pour tout entier $i \geq 1$, désignons par $Y_i$ l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, vu comme un espace de probabilité pour une mesure $p$ définie par $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$. Notons $X = \prod_{i=1}^{\infty} Y_i$ l'espace de probabilité produit des $Y_i$ et $\mu$ la mesure produit de copies de $p$. Considérons également l'intervalle unité $[0, 1]$ de la droite réelle muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue $\lambda$ (la mesure usuelle). Soit

$$T : \begin{cases} X & \longrightarrow [0,1] \\ x = (y_i)_{i \geq 1} & \longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{2^i} \end{cases}$$

l'application de la numération diadique.

(a) Vérifier que $T$ préserve les mesures, au sens où $T_*(\mu) = \lambda$.

(b) Trouver des ensembles négligeables $N \subset X$ et $N' \subset [0, 1]$ tels que la restriction de $T$ à $X \setminus N$ fournisse une bijection mesurable de $X \setminus N$ sur $[0, 1] \setminus N'$, d'inverse mesurable.

(c) Soient $S : X \longrightarrow X$ le décalage unilatéral et $D : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ la multiplication par 2 modulo 1. Vérifier que $TS = DT$.

*Moralité : du point de vue de la théorie de la mesure, les transformations $S$ et $D$ sont équivalentes.*

(d) Soient $k \geq 1$ un entier, $y_1, \ldots, y_d \in \{0, 1\}$ et $B = B_{y_1,\ldots,y_d}$ l'ensemble des nombres dans $[0, 1]$ dont le développement diadique commence par $\sum_{i=1}^{k} y_i 2^{-i}$. Que pouvez-vous déduire du théorème de récurrence de Poincaré pour les nombres de $B$ ?

(e) Enoncer l'analogue de ce qui précède pour la numération décimale.

(3) Soient $Y$ un ensemble fini, $X = \prod_{i=0}^{\infty} Y_i$ le produit d'un nombre infini de copies de $Y$ indexées par $\mathbb{N}$, et $T : X \longrightarrow X$ le décalage unilatéral.

(a) Décrire l'ensemble $X^{\text{per}}$ des points périodiques correspondants, c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in X$ pour lesquels il existe un entier $p \geq 1$ tel que $T^p(x) = x$.

(b) On considère une mesure sur $Y = \{y_0, \ldots, y_{k-1}\}$ donnée par des nombres $p_0, \ldots, p_{k-1} > 0$ tels que $p_0 + \cdots + p_{k-1} = 1$ et la mesure produit $\mu$ sur $X$. Vérifier que $\mu(X^{\text{per}}) = 0$.

Quelles sont les conditions sur les $p_j$ pour que la mesure $\mu$ soit invariante par $T$ ?

(c) Décrire d'autres mesures de probabilité sur $X$ invariantes par $T$.

(4) Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ deux espaces de probabilité. Définir leur produit de façon à ce que ce soit un espace de probabilité.

Soient de plus $S : X \longrightarrow X$ et $T : Y \longrightarrow Y$ deux transformations préservant la mesure. Définir leur produit de façon à ce que ce soit une transformation mesurable qui préserve la mesure de l'espace produit.

(5) Considérons un espace de probabilité $X = (X, \mathcal{B}, \mu)$, un borélien $A \in \mathcal{B}$ tel que $\mu(A) > 0$ et une transformation mesurable $T$ de $X$ qui préserve la mesure.

(a) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de $A$ de la forme $B \cap A$ avec $B \in \mathcal{B}$ et $\nu$ l'application de $\mathcal{C}$ dans $[0,1]$ définie par $\nu(B \cap A) = \mu(B \cap A)/\mu(A)$.

Vérifier que $(A, \mathcal{C}, \nu)$ est un espace de probabilité.

(b) Soit $N : A \longrightarrow \mathbb{N}$ une application définie par $N(x) = \inf\{n \in N | T^n(x) \in A\}$ lorsque cet infimum existe, et prolongée à $A$ tout entier par une constante arbitraire.

Vérifier que l'application $N$ est mesurable.

(c) Soit $T_A : A \longrightarrow A$ l'application définie par $T_A(x) = T^{N(x)}(x)$.

Vérifier que $T_A$ préserve la mesure $\nu$.

L'application $T_A$ est appelée *l'application de premier retour induite par $T$ sur $A$.*

(d) Particulariser au cas suivant : $X$ est l'intervalle $[0,1]$, l'application $T$ est “fois 2 modulo 1”, et $A = [0, 1/2]$. Décrire l'application $T_A$ par des formules.

(6) Soit $X$ un espace topologique. Notons $\overline{X}$ l'espace topologique dont l'ensemble sous-jacent est $X \sqcup \{\infty\}$ et dont les ouverts sont de l'un des deux types suivants : les ouverts de $X$ et les compléments dans $\overline{X}$ des compacts de $X$. Admettons le résultat suivant de topologie générale : *si l'espace $X$ est localement compact, alors l'espace $\overline{X}$ est compact.* On dit parfois que $\overline{X}$ est le *compactifié d'Alexandrov* de $X$.

(a) Soit $T$ la transformation de $\overline{\mathbb{R}}$ définie par $T(x) = x + 1$ si $x \in \mathbb{R}$ et $T(\infty) = \infty$. Trouver une mesure de probabilité sur $\overline{\mathbb{R}}$ invariante par $T$, et montrer que c'est la seule.

(b) Montrer que l'espace $\overline{\mathbb{R}}$ est homéomorphe au cercle. [Indication : penser à la projection stéréographique.]

(c) On considère l'action usuelle du groupe $SL(2, \mathbb{Z})$ sur $\overline{\mathbb{R}}$, l'action d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ sur $x \in \overline{\mathbb{R}}$ étant $\frac{ax+b}{cx+d}$. Vérifier qu'il n'existe aucune mesure de probabilité sur $\overline{\mathbb{R}}$ qui soit simultanément invariante par toutes les transformations de $SL(2, \mathbb{Z})$.

## Série II distribuée le 22 novembre 2004

(1) La suite $(\pi^n)_{n \geq 1}$ est-elle équirépartie modulo 1 ? (où $\pi = 3,14159\ldots$).

(i) Faites quelques tests à la machine, avec des suites partielles $(\pi^n)_{1 \leq n \leq N}$ et des intervalles $[a, b] \subset [0, 1]$.

(ii) Pouvez-vous répondre à la question ?

(2) Rappel du cours à propos d'un théorème de Birkhoff[9] qui est un analogue topologique du théorème de récurrence de Poincaré.

[9] En cherchant à savoir où est la formulation originale du théorème, je suis arrivé à l'article suivant ; mais je ne suis pas encore sûr que c'est la bonne source ! M.-G. D. Birkhoff, *Quelques théorèmes sur le mouvement des systèmes dynamiques,* Bull. Soc. Math. France 40 (1912) 305–323 = Collected Mathematical Ppaers, Volume I, pages 654–672 (voir aussi page xi).

Soient $X$ un espace topologique et $T : X \longrightarrow X$ une application continue. Un point $x \in X$ est dit *récurrent pour* $T$ si, pour tout voisinage $V$ de $x$ dans $X$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $T^n(x) \in V$.

*Théorème (récurrence de Birkhoff). Soient $X$ un espace compact non vide et $T : X \longrightarrow X$ une application continue. Il existe des points récurrents pour $T$.*

[Esquisse de démonstration. Soit $\mathcal{F}$ la famille des fermés non vides de $X$ tels que $T(F) \subset F$. On vérifie que cette famille est inductive. On peut donc choisir (grâce à Zorn) un élément minimal $F_0$ de $\mathcal{F}$ et un point $x \in F$. Si $F_+ = \overline{\cup_{n\geq 1} T^n(x)}$ désigne la fermeture de l'orbite future de $x$, on vérifie que $F_+ = F_0$, et donc que tous les points de $F_0$ sont récurrents pour $T$.]

Il existe une variante plus forte :

*Théorème. Soient $X$ un espace compact non vide et $T_j : X \longrightarrow X$ ($1 \leq j \leq k$) des applications continues commutant deux à deux. Alors il existe $x \in X$ et une suite d'entiers $(n_i)_{i\geq 1}$ tendant vers l'infini tels que $\lim_{i\to\infty}(T_j)^{n_i}(x) = x$ pour tout $j \in \{1, \ldots, k\}$.*

[Pour la démonstration, voir le § 2.2 du livre de H. Furstenberg déjà cité, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, Princeton Univ. Press (1981).]

(3) Soit $R$ une rotation irrationnelle du cercle.

Que dit pour $R$ le théorème de récurrence de Poincaré ? ($R$ préserve la mesure de Lebesgue). Que dit pour $R$ le théorème de récurrence de Birkhoff ?

(3bis – au cours le 8/11/2004) Soit $T$ la transformation de $[0, 1]$ définie par $T(x) = x^2$. Quelles sont les mesures de probabilité invariantes par $T$ ? [Comparer avec l'exercice I.6.]

Pour ces mesures, que dit le théorème de récurrence de Poincaré ? Que dit pour $T$ le théorème de récurrence de Birkhoff ?

(4) Pour tout $\epsilon > 0$, exhiber un ouvert dense de $[0, 1]$ dont la mesure de Lebesgue est majorée par $\epsilon$.

Pour tout $\epsilon > 0$, construire un sous-ensemble parfait de $[0, 1]$ d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue $\geq 1 - \epsilon$. [Indication : adapter la construction de l'ensemble triadique de Cantor.]

(Il existe donc des intersections dénombrables d'ouverts denses, donc des sous-ensembles de $[0, 1]$ qui sont topologiquement "gros", et qui sont de mesure nulle. Il existe aussi des réunions dénombrables de fermés d'intérieurs vides, donc des sous-ensembles de $[0, 1]$ qui sont topologiquement "petits", et qui sont de mesure pleine.)

(5) Voir l'exercice 24 du chapitre 1.

(6) Rappelons que, pour un espace mesuré $(X, \mathcal{B}, \mu)$ et pour un nombre réel $p \in [1, \infty[$, nous notons $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) telles que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$, et $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ son quotient par le sous-espace des fonctions nulles $\mu$-presque partout.

Trouver (un livre de théorie de la mesure et) une preuve du fait que l'espace $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace de Banach, pour la norme définie par $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p d\mu}$, et y repérer le rôle du lemme de Fatou.

**Série III distribuée le 29/11/2004**

(1) On considère le tore de dimension deux $\mathbb{T}^2$ muni de la $\sigma$-algèbre des boréliens et de la mesure usuelle. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des nombres réels. On note $T = T_{a,b}$ la transformation de $\mathbb{T}^2$ définie par $T(x, y) = (x+a, y+b)$, où les sommes sont calculées modulo 1. Montrer que la transformation $T$ est ergodique si et seulement si les nombres $1, a, b$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.

[Indication : suivre la méthode utilisée pour les rotations du cercle.]

(2) On reprend les notations de l'exerice 1. Montrer que la transformation de $\mathbb{T}^2$ définie par $T(x, y) = (2x + y, x + y)$ est ergodique.

(3) Soit $Y$ un ensemble fini muni d'une mesure de probabilité chargeant chaque point, $X_+ = \prod_{i\in\mathbb{N}} Y$ le produit d'une infinité de copies de $Y$ indexées par les entiers positifs, muni de la mesure produit, et $T : X_+ \longrightarrow X_+$ le décalage unilatéral. Montrer que $T$ est ergodique.

[Indication : suivre la méthode utilisée pour le décalage bilatéral.]

(4) Soient $Y = (Y, \mathcal{C}, \nu)$ un espace de probabilité et $T$ le décalage bilatéral défini sur le produit infini $X = \prod_{i\in\mathbb{Z}} Y$ de copies de $Y$ (c'est une généralisation du décalage sur le produit de copies d'un espace de probabilité fini).

Est-ce que $T$ est ergodique ?

Même question pour le décalage unilatéral sur $X_+ = \prod_{i\in\mathbb{Z}} Y$.

(5) Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et $T : X \longrightarrow X$ une application mesurable préservant $\mu$ qui est inversible d'inverse mesurable.

Soit $X = \sqcup_{s=0}^{k-1} A_s$ une *partition mesurable* de $X$, c'est-à-dire la donnée de $k$ boréliens $A_0, \dots, A_{k-1}$ de $X$ disjoints deux à deux qui recouvrent $X$ ; posons $F = \{0, \dots, k-1\}$ et notons $\alpha : X \longrightarrow F$ l'application définie par $\alpha(x) = j$ pour $x \in A_j$ (l'application $\alpha$ étiquette un point de $X$ par l'ensemble de la partition donnée auquel il appartient). Soit

$$S : X \longrightarrow \prod_{j=-\infty}^{\infty} F \qquad (S(x))_j = \alpha(T^j x) \quad \text{pour tout} \quad j \in \mathbb{Z}$$

l'application qui code les points de $X$ par les "étiquettes" de leurs orbites sous $T$.

(i) Expliciter un exemple pour lequel l'application $S$ n'est pas surjective, et un exemple pour lequel elle l'est.

(ii) Soit $\nu$ la mesure sur $X$ image par $S$ de la mesure $\mu$. Vérifier que la mesure $\nu$ est invariante par le décalage bilatéral.

(6) Exercice fait au cours le 22/11 ; voir aussi l'exercice 2 de la série II.

Soit $X$ un espace topologique à base dénombrable d'ouverts. Soit $\mu$ un mesure de probabilité sur $X$ telle que $\mu(U) > 0$ pour tout ouvert non vide $U$ de $X$. Soit $T$ une transformation mesurable de $X$ préservant la mesure $\mu$ ; on suppose la transformation $T$ ergodique relativement à $\mu$. Montrer que l'orbite future $(T^n x)_{n\geq 1}$ de $\mu$-presque tout point de $X$ est partout dense.

**Série IV distribuée le 13/12/2004**

(1) Soient $b$ un entier, $b \geq 2$ et $T$ la transformation de l'intervalle unité $[0,1[$ définie par $T(x) = 2x \pmod 1$. Vérifier que, pour la mesure de Lebesgue, la transformation $T$ est ergodique, et ceci de deux manières :

(i) en utilisant l'ergodicité du décalage convenable et l'exercice 2 de la série I,
(ii) en raisonnant sur la série de Fourier $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(2i\pi kx)$ d'une fonction $f$ de carré sommable sur $[0,1[$.

(2) Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n$, $n \geq 1$, $f$ des fonctions mesurables de $X$ dans $\mathbb{R}$. Rappelons que, si $f_n, f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est dite converger vers $f$ *en moyenne* si $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_1 = 0$, et que, si $f_n, f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est dite converger vers $f$ *en moyenne quadratique* si $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_2 = 0$.

(i) Si la mesure $\mu$ est finie, montrer que $L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \subset L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, et que cette inclusion d'espaces de Banach est continue ; de plus, pour $X = [0,1]$, l'inclusion est stricte.

(ii) Si $\mu$ est la mesure de comptage sur $X = \mathbb{N}$, montrer que $L^1(X, \mathcal{B}, \mu) \subset L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, et que cette inclusion d'espaces de Banach est continue ; de plus, si $X$ possède une infinité d'atomes (c'est-à-dire de points $x$ tels que $\mu(\{x\}) > 0$), l'inclusion est stricte.

(iii) Si $X = \mathbb{R}$ (avec la mesure de Lebesgue), montrer que les deux inclusions de l'intersection $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$ et $L^2(\mathbb{R})$ sont strictes.

(3) On reprend les notations de l'exercice précédent et on considère une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu) \cap L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

(i) Exhiber un exemple où la suite tend vers 0 en moyenne mais pas en moyenne quadratique.
(ii) Exhiber un exemple où la suite tend vers 0 en moyenne quadratique mais pas en moyenne.

Pour la suite de l'exercice, on suppose de plus que $X = [0,1]$ avec $\mu$ la mesure de Lebesgue.

(iii) Exhiber un exemple de suite $(f_n)_{n\geq 1}$ qui tende vers zéro presque partout[10], voire même partout, mais ni en moyenne ni en moyenne quadratique.
(iv) Exhiber un exemple de suite $(f_n)_{n\geq 1}$ qui tende vers zéro en moyenne, mais pas presque partout.

Indication pour (iii) : on peut choisir $f_n$ de telle sorte que $f_n(x) = 0$ pour $n \geq 2$ et $x \notin ]0, 2/n[$. Pour (iv) : voir le cours.

*Remarque.* On peut montrer que, si $f_n$ et $f$ sont dans $L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, si $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers $f$ $\mu$-presque partout, ET si $(\|f_n\|_1)_{n\geq 1}$ converge vers $\|f\|_1$, alors $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne vers $f$.

(4) Notons $Y$ l'espace de probabilité à deux points, 0 et 1, muni de la probabilité équidistribuée $\nu(0) = \nu(1) = \frac{1}{2}$. Soit $X = \prod_{j\geq 1} Y$ l'espace produit muni de la mesure produit.

[10] Donc aussi en probabilité !

Soit $n$ un entier, $n \geq 1$. Soit $x = (x_j)_{j \geq 1}$ la suite définie par $x_1 = 0$ et, pour $j \geq 2$,

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } a \geq 0 \text{ tel que } \quad (n+1)^{2a} + 1 \leq j \leq (n+1)^{2a+1} \\ 0 & \text{s'il existe } a \geq 0 \text{ tel que } \quad (n+1)^{2a+1} + 1 \leq j \leq (n+1)^{2a+2}. \end{cases}$$

Vérifier que

$$\limsup_{a \to \infty} \frac{1}{(n+1)^{2a+1}} \sum_{j=1}^{(n+1)^{2a+1}} x_j \geq 1 - \frac{1}{n+1}$$

et

$$\liminf_{a \to \infty} \frac{1}{(n+1)^{2a+2}} \sum_{j=1}^{(n+1)^{2a+2}} x_j \leq \frac{1}{n+1}.$$

En d'autres termes, si $T$ désigne comme plus haut le décalage unilatéral, les sommes de Birkhoff $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} pT^j$ *ne convergent pas* en tout point vers la fonction constante de valeur $\int_X p d\mu$.

(5) Le nombre rationnel $\frac{5}{31}$ est-il simplement normal en base 2 ? et $\frac{5}{11}$ ?

Terminologie du livre "Uniform distribution of sequences", de L. Kuipers et H. Niederreiter (J. Wiley, 1974).

Soit $b \geq 2$ un entier. Soit $x$ un nombre réel et $\{x\} = 0, x_1 x_2 \cdots$ le développement en base $b$ de sa partie fractionnaire (avec $x_1, x_2, \ldots \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$). Pour tout $k \geq 1$, pour tout bloc $A = a_1 a_2 \cdots a_k$ de chiffres dans $\{0, 1, \ldots, b-1\}$, et pour tout $n \geq k$, notons $N_b(A, n)$ le nombre d'occurences du bloc $A$ dans la suite $x_1 x_2 \cdots x_n$, c'est-à-dire le nombre d'indices $j \in \{1, \ldots, n-k+1\}$ tels que $x_{j+i-1} = a_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Le nombre $x$ est dit *simplement normal en base* $b$ si, pour tout $a \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, la limite $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} N_b(a, n)$ existe et vaut $\frac{1}{b}$. Le nombre réel $x$ est dit *normal en base* $b$ si, pour tout $k \geq 1$ et pour tout bloc $A$ de longueur $k$, la limite $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} N_b(A, n)$ existe et vaut $\frac{1}{b^k}$.

On peut montrer que le nombre $0,1234567891011121314151617181920212123242526272829303132 33\cdots$ est normal en base 10.

(6) *Le théorème d'ergodicité $L^p$ de von Neumann comme corollaire du théorème de Birkhoff.* Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité, $T : X \longrightarrow X$ une transformation mesurable préservant la mesure, $p \in \mathbb{R}$ un nombre tel que $1 \leq p < \infty$, et $f \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$. Soit $f^* : X \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction mesurable définie comme dans le théorème de Birkhoff, c'est-à-dire par $f^*(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j(x))$ pour $\mu$-presque tout $x \in X$.

Alors $f^* \in L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ et la suite $\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} fT^j$ converge vers $f^*$ au sens de la norme de l'espace de Banach $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Lire et exposer une preuve de ce corollaire. Voir par exemple le livre de P. Walters (corollaire 1.14.1) ou celui de R. Mañé, *Ergodic theory and differentiable dynamics,* Springer, 1987 (le début du chapitre II).

(7) Soient $\mathcal{H}$ un espace vectoriel hermitien et $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ un opérateur unitaire. Notons $\mathcal{K} = \text{Ker}(I - U)$ l'espace propere de $U$ de valeur propre 1 et $P$ la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{K}$. Montrer que les sommes

$$V_n = \frac{1}{n}(I + U + \cdots + U^{n-1})$$

convergent vers $P$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

[Indication. Montrer d'une part que $\lim_{n\to\infty} V_n(\xi)$ vaut 0 pour $\xi \in \mathcal{R} = \mathrm{Im}(I-U)$ et 1 pour $\xi \in \mathcal{K}$, et d'autre part que $\mathcal{K} = \mathcal{R}^{\perp}$.]

*Remarque.* De même, soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $U : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ une isométrie et $P$ la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur le sous-espace fermé des vecteurs de $\mathcal{H}$ invariants par $U$ ; alors les sommes $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j$ convergent fortement vers $U$. Cela implique le cas particulier de l'affirmation de l'exercice 6 pour $p = 2$. Voir par exemple P.R. Halmos, *Lectures on ergodic theory,* Chelsea 1956, page 16.

(8) Soient $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et $\alpha$ un nombre complexe.

Si $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$, vérifier que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_j - \alpha| = 0$. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_j - \alpha| = 0$, vérifier que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j = 0$. Montrer que la réciproque n'est pas vraie.

Dans le cadre des transformations préservant une mesure finie, il en résulte qu'une transformation fortement mélangeante est faiblement mélangeante et qu'une transformation faiblement mélangeante est ergodique.

## Série V distribuée le 17/1/2005

(1) Vérifier qu'un décalage unilatéral et un décalage bilatéral sont fortement mélangeants.

Indication : utiliser le résultat suivant. Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et $\mathcal{S}$ une semi-algèbre de parties de $X$ qui engendre $\mathcal{B}$. Pour qu'une transformation $T : X \longrightarrow X$, mesurable et préservant la mesure $\mu$, soit fortement mélangeante, il faut et il suffit que

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(T^{-n}(A) \cap B\right) \ = \ \mu(A)\mu(B)$$

pour toute paire $A, B$ d'éléments de $\mathcal{S}$. (Théorème 1.17 du livre de P. Walters.)

(2) Soit $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ un espace de probabilité et $S : Y \longrightarrow Y$ une transformation mesurable préservant la mesure. On munit l'espace à deux points $\{0,1\}$ de la mesure de probabilité $p$ équirépartie, $p(0) = p(1) = \frac{1}{2}$, on désigne par $(X, \mathcal{B}, \mu)$ l'espace de probabilité produit de $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ et $\{0,1\}$, et on définit $T : X \longrightarrow X$ par $T(x,0) = (x,1)$, $T(x,1) = (S(x),0)$.

(i) Est-ce que la transformation $T^2$ peut être ergodique ?

(ii) Est-ce que la transformation $T$ peut être faiblement mélangeante ?

(3) Soit $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité, $T : X \longrightarrow X$ une transformation mesurable préservant la mesure et $k \geq 2$ un entier. $T^k$ désigne l'itéré $k$ fois de $T$.

(i) Si la transformation $T^k$ est ergodique, vérifier que $T$ l'est aussi.
(ii) Exhiber un exemple pour lequel $T$ et $T^k$ sont ergodiques.
(iii) Exhiber un exemple pour lequel $T$ est ergodique et $T^k$ ne l'est pas.
(iv) Montrer que la transformation $T^k$ est faiblement mélangeante si et seulement $T$ l'est aussi.
(v) Montrer que la transformation $T^k$ est fortement mélangeante si et seulement $T$ l'est aussi.

[Indication. Pour (ii) et (iii), voir par exemple les exercices précédents.]

(4) La *transformation du boulanger* est la transformation $T$ du carré $X = [0,1[^2$, avec la $\sigma$-algèbre usuelle et la mesure de Lebesgue $\lambda$, définie par

$$T(x,y) = \begin{cases} (2x, \frac{1}{2}y) & \text{si} \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ (2x-1, \frac{1}{2}(y+1)) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

(Dans l'ancien temps sans doute, les boulangers écrasaient-ils un carré da pâte $X$ en $[0,2[\times[0,\frac{1}{2}[$ avant de le couper en deux puis de translater la moitié de droite sur celle de gauche.)

Vérifier d'abord que $T$ est une transformation mesurable préservant la mesure $\lambda$ qui est inversible d'inverse préservant la mesure.

On se propose ensuite de montrer que la transformation $T$ est fortement mélangeante (et donc *a fortiori* ergodique).

Soit $Y = \prod_{j\in\mathbb{Z}}\{0,1\}$ le produit d'une infinité indexée par $\mathbb{Z}$ de copies de l'espace à deux points avec mesure de probabilité équirépartie, et $S : Y \longrightarrow Y$ le décalage correspondant. Soit $\Phi : Y \longrightarrow X$ l'application définie par

$$\Phi\Big((y_j)_{j\in\mathbb{Z}}\Big) = \Big(\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}y_j, \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}y_{-(j-1)}\Big).$$

Montrer qu'il existe un sous-ensemble $X_0$ de $X$ et un sous-ensemble $Y_0$ de $Y$ tels que

$X_0$ est invariant par $T$ et $\lambda(X_0) = 1$,
$Y_0$ est invariant par $S$ tel que $\mu(Y_0) = 1$,
$\Phi^{-1}(X_0) = Y_0$,
$\Phi S|_{Y_0} = T\Phi|_{Y_0}$.

## Série VI distribuée le 24 janvier 2005

(1) Soient $A$ un ensemble fini et $X = \prod_{j=0}^{\infty} A_j$ le produit de copies de $A$ indexées par $\mathbb{N}$. Montrer que la topologie produit sur $X$ coïncide avec la topologie sous-jacente à la métrique définie par

$$d\left((x_j)_{j\geq 0}, (y_j)_{j\geq 0}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} d_A(x_j, y_j) \qquad \text{où} \quad d_A(x_j,y_j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_j = y_j \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus précisément :

(i) Vérifier que $d$ est une métrique sur $X$ (c'est même une ultramétrique).
(ii) Si $(X,\tau)$ désigne l'espace $X$ muni de la topologie produit et $(X,d)$ l'espace $X$ muni de la topologie de $d$, vérifier que l'application identité $(X,\tau) \longrightarrow (X,d)$ est continue.
(iii) Vérifier que l'application identité $(X,d) \longrightarrow (X,\tau)$ est continue en tout point.

[Rappel pour (ii) : une application $f$ d'un espace topologique $Y$ dans un espace produit $X = \prod_{j=0}^{\infty} A_j$ est continue si et seulement si la composition de $f$ et de la projection canonique $X \longrightarrow A_j$ est continue pour tout $j$.]

Remarque. La topologie produit fait de $X$ un espace compact (théorème de Tychonoff). Pour une preuve directe que $(X, d)$ est compact, voir par exemple les indications pour l'exercice 7, paragraphe 20 du chapitre 3, dans J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne,* Gauthier-Villars, 1963.

(2) On particularise la situation de l'exercice précédent au cas de l'ensemble $A = \{0, 1\}$. On note désormais $\Sigma_2 = \prod_{j=0}^{\infty} A_j$ l'espace compact correspondant et $S : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$ le décalage unilaltéral. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $\mathrm{Per}_n(S)$ l'ensemble des points périodiques de période $n$ de $S$, c'est-à-dire l'ensemble des points fixes de l'application itérée $S^n$ ; soit $\mathrm{Per}(S)$ la réunion des ensembles $\mathrm{Per}_n(S)$ pour $n \geq 1$.

(i) Vérifier que l'application $S$ est continue. Calculer la quantité

$$\sup_{x,y \in \Sigma_2, x \neq y} \quad \frac{d(S(x), S(y))}{d(x, y)}.$$

(ii) Quel est le cardinal de $\mathrm{Per}_n(S)$ ?

(iii) Montrer que le décalage $S$ est une *application chaotique* au sens où cette application possède les trois propriétés suivantes :

- $\mathrm{Per}(S)$ est dense dans $\Sigma_2$ ;
- il existe un point $x \in \Sigma_2$ dont la $S$-orbite $(S^n(x))_{n \geq 0}$ est dense dans $\Sigma_2$ ;
- il existe une constante $M > 0$ (à préciser) telle que,
  pour tout $x \in \Sigma_2$ et pour tout $\epsilon > 0$,
  il existe $y \in \Sigma_2$ et $n \geq 1$ tels que $d(y, x) < \epsilon$ et $d(S^n(y), S^n(x)) \geq M$.

(iv) Soit $x \in \Sigma_2$. Identifier *l'ensemble stable* de $x$, c'est-à-dire l'ensemble

$$W^s(x) \; = \; \{y \in \Sigma_2 \;\; | \;\; \lim_{n \to \infty} d(S^n(x), S^n(y)) = 0\}.$$

Quel est son cardinal ?

[En cas de perplexité durable, consulter par exemple le § 1.6 dans R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems,* Benjamin, 1986.]

(3) Vérifier que l'application $H : e^{i\theta} \longmapsto e^{2i\theta}$ du cercle $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ dans lui-même est chaotique au sens de l'exercice précédent.

Qu'en est-il d'une rotation irrationnelle ?

(4) Montrer que l'application $F : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, $t \longmapsto 4t(1 - t)$ est chaotique.

Indication. Soit $\alpha : [-1, 1] \longrightarrow [0, 1]$, $s \longmapsto \frac{1}{2}(1 - s)$ et $\beta : \mathbb{S}^1 \longrightarrow [-1, 1]$, $e^{i\theta} \longmapsto \cos\theta$. Soit par ailleurs $G : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, $s \longmapsto 2s^2 - 1$ et $H$ comme à l'exercice précédent. Vérifier que $G\beta = \beta H$ et $F\alpha = \alpha G$.

(5) L'*application tente* $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ est définie par $T(t) = 2t$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $T(t) = 2 - 2t$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

(i) Evaluer le cardinal de $\mathrm{Per}_n(T)$ pour tout $n \geq 1$. Vérifier que l'ensemble $\mathrm{Per}(T)$ est dense dans $[0,1]$. [Indication : esquisser le graphe de $T^n$ et contempler les points d'intersection avec le graphe de l'application identique.]

(ii) Montrer que l'application $T$ est chaotique.

Indication pour l'existence d'une orbite dense. Pour $t \in [0,1[$, notons $(x_j(t))_{j\geq 1}$ les chiffres du *développement dyadique propre* de $t$, c'est-à-dire les chiffres $x_j(t) \in \{0,1\}$ tels que $t = \sum_{j\geq 1} x_j(t)2^{-j}$ et tels que la suite des $x_j$ n'est pas ultimement constante de valeur 1. Ainsi :

si $0 \leq t < \frac{1}{2}$, alors $x_1(t) = 0$ et $T(t) = \sum_{j\geq 1} x_{j+1}(t)2^{-j}$,
si $\frac{1}{2} \leq t < 1$, alors $x_1(t) = 1$ et $T(t) = 1 - \sum_{j\geq 1} x_{j+1}(t)2^{-j}$.

Comme $T(1-s) = T(s)$ pour tout $s \in [0,1]$, il en résulte que

$$T^k(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j\geq 1} x_{j+k}(t)2^{-j} & \text{si} \quad x_k(t) = 0, \\ \displaystyle 1 - \sum_{j\geq 1} x_{j+k}(t)2^{-j} & \text{si} \quad x_k(t) = 1 \end{cases}$$

pour tout $k \geq 1$.

(iii) Observer que la mesure de Lebesgue est invariante par $T$, et qu'il existe des mesures de probabilité sur $[0,1]$ qui sont invariantes par $T$ et non équivalentes à la mesure de Lebesgue.

(iv) Vérifier que $\cup_{n\geq 0} T^{-n}(t)$ est dense dans $[0,1]$ pour tout $t \in [0,1]$.

(v) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable à valeurs positives telle que $\int_0^1 f(t)dt = 1$ et soit $\mu$ la mesure de probabilité sur $[0,1]$ définie par $\mu(A) = \int_A f(t)dt$ pour tout ensemble mesurable $A \subset [0,1]$. Vérifier que la mesure $\mu$ est invariante par $T$ si et seulement si[11]

$$f(t) = \frac{f\left(\frac{t}{2}\right) + f\left(1 - \frac{t}{2}\right)}{2}$$

pour presque tout $t \in [0,1]$.

(vi) Les notations étan celles de (v), on suppose de plus la fonction $f$ continue. Montrer que $f(t) = 1$ pour tout $t \in [0,1]$, de telle sorte que $\mu$ est la mesure de Lebesgue.

[Indication : considérer $\cup_{n\geq 0} T^{-n}(t)$ pour $t$ un maximum de la fonction $f$.]

Remarque : l'objet de l'exercice suivant est de montrer que, sous l'hypothèse plus faible que la fonction $f$ est dans $L^1([0,1])$, il est encore vrai que $f(t) = 1$ pour presque tout $t$.

(vii) Vérifier que l'application $\Phi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par $\Phi(t) = \sin^2(\frac{\pi}{2}t)$ est un homéomorphisme et que $\Phi T = F\Phi$ (avec $F$ comme à l'exercice 4).

[11] Il est presqu'immédiat de montrer que, si la fonction $f$ satisfait la relation ci-dessous, alors la mesure $\mu$ est invariante par $T$. L'implication opposée est plus délicate ; voir par exemple R.R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem, Second edition,* Springer Lecture in Mathematics 1757 (2001), le lemme 12.1 page 74 [lemme 10.1 page 78 dans la première édition, de 1966].

(6) Mesures invariantes et ergodicité pour les transformations $H, G, F, T$.

On conserve les notations des exercices 3 à 5. Vérifier les assertions suivantes.

(i) La mesure de Lebesgue normalisée $\frac{d\theta}{2\pi}$ sur le cercle $\mathbb{S}^1$ est invariante par l'application $H : e^{i\theta} \longmapsto e^{2i\theta}$.

(ii) L'image de $\frac{d\theta}{2\pi}$ par l'application $\beta : \mathbb{S}^1 \longrightarrow [-1,1], e^{i\theta} \longmapsto \cos\theta$ est la mesure de probabilité $\frac{ds}{\pi\sqrt{1-s^2}}$ sur $[-1,1]$, invariante par l'application $G : s \longmapsto 2s^2 - 1$.

(iii) L'image de $\frac{ds}{\pi\sqrt{1-s^2}}$ par l'homéomorphisme $\alpha : [-1,1] \longrightarrow [0,1], s \longmapsto \frac{1}{2}(1-s)$ est la mesure de probabilité $\frac{dt}{\pi\sqrt{t(1-t)}}$ sur $[0,1]$, invariante par l'application $F : t \longmapsto 4t(1-t)$.

(iv) L'image de $\frac{dt}{\pi\sqrt{t(1-t)}}$ par l'homéomorphisme $\Phi : [0,1] \longrightarrow [0,1], t \longmapsto \sin^2(\frac{\pi}{2}t)$ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, invariante par l'application $T$.

(v) La transformation $H$ de $\mathbb{S}^1$ étant ergodique relativement à la mesure $\frac{d\theta}{2\pi}$, il en est de même pour

- la transformation $G$ de $[-1,1]$ relativement à la mesure $\frac{ds}{\pi\sqrt{1-s^2}}$,
- la transformation $F$ de $[0,1]$ relativement à la mesure $\frac{dt}{\pi\sqrt{t(1-t)}}$,
- la transformation $T$ de $[0,1]$ relativement à la mesure de Lebesgue.

(vi) Une mesure sur $[0,1]$ qui est finie, absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et invariante par $T$ est nécessairement proportionnelle à la mesure de Lebesgue. [Indication. Soit $\mu$ une telle mesure ; vu le théorème de Radon-Nykodim, il existe une densité $f \in L^1([0,1])$ telle que $d\mu(x) = f(x)dx$. Si la mesure $\mu$ est invariante par $T$, alors[12] $f \circ T = f$ presque partout. Par ergodicité de $T$ relativement à la mesure de Lebesgue, il en résulte que $f$ est presque partout égale à une constante.]

(7) La *famille quadratique* est la famille d'applications $F_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dépendant d'un paramètre $\mu > 0$, définie par

$$F_\mu(t) \;=\; \mu t(1-t).$$

(i) Déterminer les points fixes de $F_\mu$. En chacun d'eux déterminer si la valeur absolue de $\frac{dF_\mu}{dt}$ est strictement inférieure à 1 (point fixe attractif), égale à 1, ou strictement supérieure à 1 (point fixe répulsif).

(ii) Si $0 < \mu < 1$, montrer que $F_\mu^n(t)$ tend pour $n \to \infty$ vers le point fixe attractif lorsque $1 - \frac{1}{\mu} < t < \frac{1}{\mu}$ et vers $-\infty$ lorsque $t < 1 - \frac{1}{\mu}$ ou $t > \frac{1}{\mu}$. Discuter le cas limite $\mu = 1$.

(iii) Si $1 < \mu < 2$, montrer que $F_\mu^n(t)$ tend pour $n \to \infty$ vers le point fixe attractif lorsque $0 < t < 1$. Discuter le cas limite $\mu = 2$.

(iv) Si $\mu > 1$ et $t \notin I = [0,1]$, montrer que $F_\mu^n(t)$ tend vers $-\infty$ pour $n \to \infty$. [Indication : si $t < 0$, alors $F_\mu(t) < t$.]

Les points (i) à (iv) montrent dans quel sens la dynamique de $F_\mu$ est banale lorsque $\mu$ est petit ou lorsque $x \notin I$ ; l'exercice précédent permet de traiter le cas $\mu = 4$. On suppose désormais que $\mu > 4$ et on cherche à comprendre la restriction de $F_\mu$ à $I$.

(v) Vérifier que $A_0 = \{t \in I \mid F_\mu(t) \notin I\}$ est un intervalle ouvert de $[0,1]$ centré en $\frac{1}{2}$ ; le complémentaire de $A_0$ dans $I$ est donc formé de deux intervalles fermés : $I_0$ contenant

[12] Voir la note précédente.

0 et $I_1$ contenant 1. Identifier l'ensemble $A_1 = \{t \in I_0 \sqcup I_1 \mid F_\mu(t) \in A_0\}$ et dessiner $I \setminus (A_0 \sqcup A_1)$.

Le pas (v) est le pas initial d'une construction d'une suite $(A_n)_{n \geq 0}$ de sous-ensembles de $I$ telle que

- ∘ $I \setminus (A_0 \sqcup \ldots \sqcup A_n)$ est la réunion disjointe de $2^{n+1}$ sous-intervalles fermés de $I$, et la restriction de $F_\mu^{n+1}$ à chacun d'entre eux est une application monotone surjective d'image $I$, ce dont on déduit que $\mathrm{Per}_n(F_\mu)$ contient exactement $2^n$ points ;
- ∘ l'ensemble $\Lambda = I \setminus (\cup_{n=0}^{\infty} A_n)$ est un sous-espace de Cantor $F_\mu$-invariant de $[0,1]$, qui coïncide avec $\{t \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} F_\mu^n(t) \neq -\infty\}$ ;
- ∘ il existe une application continue surjective à fibres finies de l'espace $\Sigma_2$ de l'exercice 2 sur $\Lambda$ qui entrelace le décalage $S$ et la restriction de $F_\mu$ à $\Lambda$, ce qui permet de montrer que cette restriction est une application chaotique.

La littérature traitant de cette famille quadratique est vaste, notament pour l'étude de la transition d'une dynamique banale ($\mu \leq 2$) à une dynamique chaotique ($\mu \geq 4$). Voir par exemple le livre de Devaney déjà cité, ainsi que celui de P. Collet et J.-P. Eckmann, *Iterated maps on the interval as dynamical systems,* Birkhäuser, 1980.

## Série VII (non distribuée !)

(1) Montrer que les espaces boréliens $[0,1]$ et $[0,1]^2$ sont isomorphes (pour les $\sigma$-algèbres engendrées par les ouverts).

(2) Soient $(X, \mathcal{B}, \mu)$ un espace de probabilité et $T : X \longrightarrow X$ une transformation mesurable, préservant la mesure, inversible.

Vérifier que $T$ et $T^{-1}$ on même spectre ponctuel.

(3) Soit $G$ un groupe métrique compact. Notons $\mathcal{B}$ la $\sigma$-algèbre des parties boréliennes de $G$ et $\mu$ la mesure de Haar de masse 1 sur $G$ (c'est un théorème standard qu'il existe une unique telle mesure). On considère $a \in G$ et la transformation $R$ de $(G, \mathcal{B}, \mu)$ qui est la rotation $g \longmapsto ag$ de $G$.

(i) Montrer que, si $R$ est ergodique, alors $(a^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $G$, et par suite $G$ est abélien.

[Indication. Soient $H$ le plus petit sous-groupe fermé de $G$ contenant $a^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $G/H$ le groupe quotient, qui est abélien compact. Admettre le fait classique suivant : si $G/H$ n'est pas réduit à un élément, il existe un homorphisme continu de $G/H$ dans le groupe des nombres complexes de module 1 qui n'est pas l'homomorphisme constant de valeur 1.]

On suppose désormais que $G$ est un tore : $G = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ pour un entier $d \geq 1$ convenable. (Cette hypothèse simplificatrice permet de n'utiliser la théorie de Fourier que dans le cas des tores, plutôt que dans le cas général des groupes abéliens compacts.)

(ii) Si $(a^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans $\mathbb{T}^d$, montrer que $R$ est ergodique.

[Indication : analyser l'effet de la rotation $R$ sur une fonction $f : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forme $f = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k e_k$, où $e_k(t_1, \ldots, t_d) = \exp\left(2i\pi(k_1 t_1 + \cdots + k_d t_d)\right)$.]

(4) Soit $a \in M_d(\mathbb{Z})$ une matrice $d$-fois-$d$ à coefficients entiers. Notons $A$ l'endomorphisme correspondant du tore $\mathbb{T}^d$ ; plus précisément, si $p : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d$ désigne la projection canonique, $A$ est défini par $A(p(t)) = p(a(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$.

(i) Vérifier que $A$ est surjectif si et seulement si $a$ est de rang $d$.

(ii) Si $a$ possède une valeur propre $\lambda$ qui est une racine de l'unité d'ordre exactement $k$, pour un entier $k > 1$, montrer que la transformation $A$ n'est pas ergodique.

[Indication. Les hypothèses impliquent qu'il existe $n \in \mathbb{Z}^d$ tel que $({}^t a)^k(n) = n$, où ${}^t a$ désigne la matrice transpoée de $a$. La fonction $e_n + e_n A + \cdots e_n A^{k-1}$ est alors $A$-invariante.]

(iii) Pour $a$ de rang $d$, montrer la réciproque de l'assertion (ii), et donc le résultat suivant :

*Soit $A$ un endomorphisme surjectif d'un tore $\mathbb{T}^d$ associé à une matrice $a \in M_d(\mathbb{Z})$ de rang $d$. Alors $A$ est ergodique (pour la mesure de Haar) si et seulement si la matrice $a$ ne possède aucune racine de l'unité comme valeur propre.*

(C'est le corollaire 1.10.1 du livre de Peter Walters.)

Pierre de la Harpe, Section de Mathématiques, Université de Genève, C.P. 240, CH-1211 Genève 24, Suisse. Mel : Pierre.delaHarpe@math.unige.ch