Exercice I

Soit $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $E = \{ M(a,b,c) \,/\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \}$

1. On note $J = M(0,1,0)$. Calculer J^2.
   Exprimer $M(a,b,c)$ en fonction de I_3, J et J^2

2. E est-il un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$? Si oui, quelle est sa dimension ? Est-il stable par produit ?

3. La matrice J est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner ses valeurs propres en fonction de $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ainsi que les vecteurs propres associés.

4. La matrice M est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$?

5. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $b = c$

6. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme associé à la matrice $M(a,b,c)$.
   Conditions sur a, b, c pour que $f_{a,b,c}$ soit un projecteur ?
   Donnez alors son noyau et son image.

Exercice 2 :

$f(x,y) = x \ln y - y \ln(x) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^{+*2}$

extremums sur $\mathbb{R}^{+*2}$