

Soit $\begin{cases} a \text{ dans } \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \\ d \text{ dans } \mathbb{R}_+ \end{cases}$, on pose $T_a = \begin{pmatrix} 1 & d^{\frac{1}{4}} \tan(a) \\ -d^{\frac{1}{4}} \tan(a) & 1 \end{pmatrix}$

1) Donner le lien entre T_{a+b} et $T_a \cdot T_b$

2) Soit d dans \mathbb{N} , $d \geq 2$ sans valuation paire dans sa décomposition en facteurs premiers.

On note $Ad = \{a + b\sqrt{d}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$

Montrer que Ad est un corps.

3) On pose $\sigma: Ad \rightarrow Ad$
 $a + b\sqrt{d} \mapsto a - b\sqrt{d}$

Montrer que σ est un automorphisme de corps.

4) Soit p et q dans \mathbb{Z}^* , q impair, montrer que $\tan(\pi \times \frac{p}{q})$ ne peut s'écrire sous la forme $x \times d^{\frac{1}{4}}$ avec d entier vérifiant les conditions de 2) et x dans \mathbb{Q} .