

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f, f' et f'' sont bornées. On note $M_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^{(k)}(x)|$ pour $x \in \{0, 1, 2\}$.

1. Il existe $K > 0$ tel que $M_1 \leq K\sqrt{M_0 M_2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $h > 0$, on a par Taylor-Lagrange, $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2}M_2$, donc :

$$|f'(x)| \leq \frac{h}{2}M_2 + \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \leq \frac{h}{2}M_2 + \frac{2M_0}{h}$$

Si $M_0 = 0$, le résultat est trivial. Si $M_2 = 0$, f est affine bornée, donc constante : l'inégalité est une égalité. Si $M_0 > 0$ et $M_2 > 0$, la fonction de droite admet un minimum sur $\mathbb{R}_+$ atteint pour $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ et égal à $2\sqrt{M_0 M_2}$, donc $K = 2$ convient. En réalité, il y a une valeur plus petite qui convient à savoir $\sqrt{2}$ (on montre d'ailleurs que c'est la meilleur possible qui soit indépendante de f). Pour le montrer, on applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $\phi_x : t \mapsto f(x+t) - f(x-t)$ sur $[0, h]$. Comme $\phi_x(0) = 0$, $\phi'_x(0) = 2f'(x)$ et $|\phi''_x(t)| = |f''(x+t) - f''(x-t)| \leq 2M_2$, on obtient :

$$|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} \times (2M_2) = h^2 M_2$$

d'où comme précédemment :

$$|f'(x)| \leq \frac{h}{2}M_2 + \frac{M_0}{h}$$

On a remplacé le terme $\frac{2M_0}{h}$ par $\frac{M_0}{h}$ et cette fois le minimum cherché vaut $\sqrt{2M_0 M_2}$.

2. Cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On suppose de plus que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$. Si $x \in \mathbb{R}$ et $C > 0$, on a le lemme suivant :

► **Lemme.** Il existe $y \in I_x = [x - C\sqrt{f(x)}, x + C\sqrt{f(x)}]$ tel que $|f'(y)| \leq \frac{\sqrt{f(x)}}{C}$.

Par l'absurde, si $|f'(y)| > \frac{\sqrt{f(x)}}{C}$ pour tout $x \in I_x$, alors par continuité f' a un signe constant sur I_x . Si par exemple $f'(y) > \frac{\sqrt{f(x)}}{C}$ pour tout $y \in I_x$, alors par les accroissements finis

$$f(x) - f(x - C\sqrt{f(x)}) > \frac{\sqrt{f(x)}}{C} \times C\sqrt{f(x)} = f(x)$$

ce qui est contradictoire puisque $f(x - C\sqrt{f(x)}) \geq 0$. Le cas $f'(y) < -\frac{\sqrt{f(x)}}{C}$ est identique en raisonnant sur $f(x) \geq f(x) - f(x + C\sqrt{f(x)}) > -\left(-\frac{\sqrt{f(x)}}{C}\right) \times C\sqrt{f(x)} = f(x)$, d'où le lemme. ♦

On a alors $|f'(x) - f'(y)| \leq M_2|x - y| \leq C\sqrt{f(x)}M_2$, puis :

$$|f'(x)| \leq |f'(y)| + |f'(x) - f'(y)| \leq \frac{\sqrt{f(x)}}{C} + C\sqrt{f(x)}M_2$$

La méthode de la question précédente conduit alors en prenant $C = \frac{1}{\sqrt{M_2}}$ (lorsque f n'est pas une fonction constante) à l'inégalité $|f'(x)| \leq 2\sqrt{f(x)M_2}$.