INFORMATIQUE X
16 juin 2018
Candidat : Hugo Schott (Lycée Turgot, Limoges)

1 Tableau unidimensionnel

On considère un tableau `Tab` de longueur n dont la valeur d'indice k ($0 \leq k < n$) sera notée `Tab[k]`. On note : $S_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} \texttt{Tab}[k]$. L'objectif est de trouver la valeur maximale de $S_{i,j}$. On note : $\max S_{\texttt{Tab}} = \max\{S_{i,j}/0 \leq i \leq j < n\}$.

1. Écrire une fonction `sommeTableau` prenant en argument un tableau `Tab` de longueur n, et deux entiers i et k tels que $0 \leq i \leq j < n$, et renvoyant $S_{i,j}$. Donner sa complexité.
2. Écrire une fonction `maxIntervalleNaif` prenant en argument un tableau `Tab` de longueur n et renvoyant $\max S_{\texttt{Tab}}$. La complexité de cette fonction sera en $O(n^3)$.
3. Améliorer la fonction précédente afin d'obtenir une complexité en $O(n^2)$.
4. On s'intéresse maintenant aux intervalles se terminant par l'indice j tel que $0 \leq j < n$. On note : $M_j = \max\{S_{i,j}/0 \leq i \leq j\}$.
   (a) Établir une relation entre $M_{j?1}$, M_j et $\texttt{Tab}[j]$.
   (b) Écrire une fonction de complexité linéaire `maxIntervalleLineaire` prenant en argument un tableau de longueur n et renvoyant $\max S_{\texttt{Tab}}$.

2 Tableau bidimensionnel

On s'intéresse maintenant à des matrices carrées de taille n. Soit $M \in M_n(\mathbf{Z})$. Une sous-matrice de M sera repérée par les indices de position de deux cases de M. La somme des éléments d'une sous-matrice repérée par le quadruplet (i, k, j, l) sera donnée par $\sum_{x=i}^{k} \sum_{y=j}^{l} M[x, y]$ et notée $S_{i,k,j,l}$. L'objectif est de trouver la valeur maximale de $S_{i,k,j,l}$, notée $\max S_M$.

5. Écrire une fonction `sommeSousMatrice` prenant en argument une matrice carrée M de taille n et quatre indices i, k, j, l (tels que $0 \leq i \leq k < n$ et $0 \leq j \leq l < n$) et renvoyant $S_{i,k,j,l}$. Donner sa complexité.
6. Écrire une fonction `maxSommeMatriceNaif` prenant en argument une matrice M et renvoyant $\max S_M$. Donner sa complexité.
7. Écrire une fonction `maxSommeMatriceEntre` prenant en argument une matrice M et deux entiers i et k tels que $0 \leq i \leq k < n$ et renvoyant la valeur maximale de $S_{i,k,j,l}$, où i et k sont fixés par les arguments. On pensera à utiliser la fonction `maxIntervalleLineaire` de la question 4.b.
8. Écrire une fonction `maxSommeMatrice4` prenant en argument une matrice M et renvoyant $\max S_M$. La complexité de cette fonction sera en $O(n^4)$.
9. Améliorer cette fonction pour obtenir une complexité en $O(n^3)$.

3 Questions orales

- Quel est l'ordre de grandeur du nombre d'opérations qu'effectue un ordinateur en une seconde ?
- Quelle caractéristique de l'ordinateur nous donne cette information ?
- L'algorithme de complexité en $O(n^6)$ met donc un temps considérable pour traiter une matrice de taille 1000. Pensez-vous que l'on rencontre souvent des matrices de taille 1000 ?
- Donner un algorithme qui permettrait de classer des équipes de foot en fonction de leur nombre de points, et dans le cas d'une égalité du nombre de points, en fonction de leur nombre de buts, sachant qu'on dispose d'une liste composée d'un tuple (`nombreDePoints`, `nombreDeButs`) pour chaque équipe.